ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει: $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$.

A.2 Πότε μια συνάρτηση f λέγεται ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει:

$$f^{-1}(f(x))=x,\ x\in A \quad \text{και} \quad f(f^{-1}(y))=y,\ y\in f(A)$$

β) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

γ) Όταν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $\alpha z^2+\beta z+\gamma=0$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $\alpha\neq 0$ είναι αρνητική, τότε η εξίσωση δεν έχει ρίζες στο σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στρέφει τα κοίλα προς τα άνω, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

ε) Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$ τότε ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 2ο

Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς z και w ισχύουν

$$\left|\left(i+2\sqrt{2}\right)z\right|=6 \quad \text{και} \quad |w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$$

τότε να βρείτε:

α. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z.

β. το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w.

γ. την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

δ. την ελάχιστη τιμή του $|z-w|$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x\ln x &, \ x>0 \\ 0 &, \ x=0 \end{cases}$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{\alpha}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του α.

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$$

για κάθε $x > 0$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$.

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος **(α)** και τη συνάρτηση g του ερωτήματος **(β)** ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε:

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$.

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι $1-1$.