

ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Έστω μία συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$.
- B.** Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού;
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι $1 - 1$, αλλά δεν είναι γνησίως μονότονες.
- β)** Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.
- γ)** Το ολοκλήρωμα $\int_a^\beta f(x) dx$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.
- δ)** Αν a, β πραγματικοί αριθμοί, τότε: $a + \beta i = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ή $\beta = 0$.
- ε)** Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και ℓ ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

- α.** Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.
- β.** Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$.
- γ.** Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w , για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, $x > 0$.

- α.** Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.
- β.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)} & , x > 0 \\ k & , x = 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, +\infty),$$

$$h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x tf(t) dt}, \quad x \in (0, +\infty).$$

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1} [f(t) + F(t)] dt = F(1)$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

γ. Αν $h(1) = 2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t) dt < 2 \int_0^2 tf(t) dt$.

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t) dt = \frac{1}{2} F(1)$.