ΘΕΜΑ 1ο

Α. **α.** Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

β. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς **1, 2, 3, 4** και **5** των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε την ένδειξη **(Σ),** αν η αντίστοιχη πρόταση είναι σωστή ή **(Λ),** αν η αντίστοιχη πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για τον μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + \beta i$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $z = 0$ τότε και μόνο τότε, αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με κοινό πεδίο ορισμού το σύνολο A. Τότε πάντα ισχύει:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot g(x)\right) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

3. Έστω μια συνάρτηση f που είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ.
Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

4. Αν είναι $\int_\alpha^\beta f(x)dx > 0$, τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

5. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σ' ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f, σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z = k + (k+1)i$, $k \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι η ευθεία $y = x + 1$.

β. Ποιοι από αυτούς τους μιγαδικούς αριθμούς έχουν $|z| = 1$;

Β. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει

$$\alpha^2 + \beta^2 + 8 = (1-i)^4\beta - (1+i)^4\alpha,$$

να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -2$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \dfrac{x + \ln x}{x}$, $x > 0$.

α. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

γ. Να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα: $I = \int_1^{e^2} f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=ημx$, όπου $x\in\mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $(0,f(0))$ της γραφικής παράστασης της f.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$ και $y=1$.

γ. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει η ανισότητα $ημx > x-\frac{3}{2}x^2$.