ΘΕΜΑ 1ο

Α. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ισχύει $f'(x)=0$, να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Β. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

β) Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο στο $x_0 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

γ) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x} = 1$.

δ) Κάθε συνάρτηση f συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

ε) Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$ είναι $E(\Omega)=\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z=(2\lambda+1)+(2\lambda-1)i$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Α. **α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκονται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

β. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς να αποδείξετε ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_0=1-i$ έχει το μικρότερο δυνατό μέτρο.

Β. Να βρεθούν οι μιγαδικοί αριθμοί w οι οποίοι ικανοποιούν την εξίσωση

$$|w|^2+\bar{w}-12=z_0$$

όπου z_0 ο μιγαδικός αριθμός που αναφέρεται στο προηγούμενο ερώτημα.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$, όπου $\alpha>0$ και $\alpha\neq 1$.

Α. Αν ισχύει $f(x)\geq 1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

Β. Για $\alpha=e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0,+\infty)$.

γ. Αν $\beta,\gamma\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1}+\frac{f(\gamma)-1}{x-2}=0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μία συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,2]$ για την οποία ισχύει $\int_0^2 (t-2)f(t)dt=0$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$H(x)=\int_0^x tf(t)dt\,,\quad x\in[0,2],$$

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{H(x)}{x}-\displaystyle\int_0^x f(t)dt+3 & , \quad x\in(0,2] \\ 6\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sqrt{1-t^2}}{t^2} & , \quad x=0\end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι συνεχής στο διάστημα $[0,2]$.

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση G είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0,2)$ και ότι ισχύει

$$G'(x)=-\frac{H(x)}{x^2}\,,\quad 0<x<2$$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\alpha\in(0,2)$ τέτοιος ώστε να ισχύει $H(\alpha)=0$.

δ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας αριθμός $\xi\in(0,\alpha)$ τέτοιος ώστε να ισχύει

$$\alpha\int_0^\xi tf(t)dt=\xi^2\int_0^\alpha f(t)dt$$