

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

B. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν z είναι ένας μιγαδικός αριθμός, τότε για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.

β. Η συνάρτηση f είναι 1-1, αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ κοντά στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

δ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} \setminus \{x \mid \cos x = 0\}$ και

$$\text{ισχύει } f'(x) = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ε. Για κάθε συνάρτηση f , παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ , ισχύει:

$$\int f'(x) dx = f(x) + c, \quad x \in \Delta$$

όπου c είναι μια πραγματική σταθερά.

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $(2-i)z + (2+i)\bar{z} - 8 = 0$.

α. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $z = x + yi$ που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

β. Να βρείτε τον μοναδικό πραγματικό αριθμό z_1 και τον μοναδικό φανταστικό αριθμό z_2 που ικανοποιούν την παραπάνω εξίσωση.

γ. Για τους αριθμούς z_1, z_2 που βρέθηκαν στο προηγούμενο ερώτημα, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 40$$

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln[(\lambda + 1)x^2 + x + 1] - \ln(x + 2), \quad x > -1$$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$.

- A.** Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.
- B.** Έστω ότι $\lambda = -1$.
- α.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- β.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- γ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + a^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό a με $a \neq 0$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = kxe^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$f'(0) = 2f(0), \quad f'(2) = 2f(2) + 12e^4, \quad f(1) = e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση:

$$g(x) = 3x^2 - [f'(x) - 2f(x)]e^{-2x}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$.

- β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει:

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

- γ.** Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 2]$.

- δ.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 e^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$.

- ε.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$.