

ΘΕΜΑ 1ο

- A. α.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- β.** Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f ;
- B.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τους αριθμούς 1, 2, 3, 4 και 5 των παρακάτω προτάσεων και δίπλα σε κάθε αριθμό να σημειώσετε τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
1. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha + \beta i$ και $\gamma + \delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.
 2. Κάθε συνάρτηση που είναι $1 - 1$ είναι γνησίως μονότονη.
 3. Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.
 4. Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R}^* και ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.
 5. Ισχύει: $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$, όπου α, c είναι πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \neq -1$.

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός: $z = \frac{1}{1+i} - \frac{i(i-3)}{2}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι: $-\bar{z} = -1 + i$, $z^2 = 2i$, $z^3 = -2 + 2i$.
- β.** Αν A, B, Γ είναι οι εικόνες των μιγαδικών $-\bar{z}, z^2, z^3$, αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- γ.** Να αποδείξετε ότι: $|z^3 - z^2|^2 = |z^2 + \bar{z}|^2 + |z^3 + \bar{z}|^2$.

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{x-\alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρεθεί η τιμή του α , ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = ex$.
- β.** Για $\alpha = -1$:
- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
 - ii. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $x'x$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x - 1$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

- α.** Να αποδείξετε ότι: $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x > 0$.
- β.** Αν $h(x) = f(x) - g(x)$, τότε:
- Να αποδείξετε ότι: $0 \leq h(x) \leq e - 2$, για κάθε $x \in [1, e]$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.
 - Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_1^e e^{h(x)} [h(x) + 1] h'(x) dx$.