

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει

$$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x.$$

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f(x) = a^x$, $a > 0$, τότε ισχύει $(a^x)' = x a^{x-1}$.

β) Αν ορίζονται οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε πάντοτε ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ και ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$.

ε) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω ότι οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης δευτέρου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές για τις οποίες ισχύουν

$$z_1 + z_2 - 2 \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 = 5$$

B1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 .

B2. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει η σχέση

$$|w - z_1|^2 + |w - z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικός επίπεδο είναι ο κύκλος με εξίσωση $(x+1)^2 + y^2 = 4$.

B3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B2** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει

$$2 \cdot \operatorname{Re}(w) + \operatorname{Im}(w) = 0$$

B4. Αν w_1, w_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **B2** με την ιδιότητα $|w_1 - w_2| = 4$, να αποδείξετε ότι $|w_1 + w_2| = 2$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$.

- Γ1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$.
- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.
- Γ4.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$ και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο \mathbb{R} με $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \int_0^1 f(xt) dt + x^3}{\eta\mu^3 x} = +\infty$.

Αν επιπλέον δίνεται ότι $f'(x) + 2x = 2x \cdot (f(x) + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{x^2} - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

- Δ4.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_x^{x+2} f(t) dt, \quad x \geq 0$$

και να λύσετε στο \mathbb{R} την ανίσωση

$$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t) dt + \int_6^4 f(t) dt < 0$$