ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x$, $x\in A$, όπου $A=\mathbb{R}-\{x \mid \sigma\upsilon\nu x=0\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $(\varepsilon\varphi x)'=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x\in A$.

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Αν $\alpha>1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$.

γ) Αν η συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε ισχύει $f^{-1}(f(x))=x$, $x\in A$.

δ) $\int \eta\mu x\,dx=\sigma\upsilon\nu x+c$, $c\in\mathbb{R}$.

ε) Αν οι συναρτήσεις f', g' είναι συνεχείς σε ένα διάστημα Δ, τότε ισχύει

$$\int f(x)g'(x)dx=f(x)g(x)+\int f'(x)g(x)dx,\quad x\in\Delta$$

ΘΕΜΑ Β

Έστω οι μιγαδικοί αριθμοί z για τους οποίους ισχύει $|z|=|z-2i|$.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία με εξίσωση $y=1$.

Β2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, να βρείτε εκείνους που έχουν μέτρο ίσο με $\sqrt{2}$.

Β3. Έστω $z_1=1+i$ και $z_2=-1+i$ οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα **Β2**.

Να αποδείξετε ότι $z_1^4+z_2^4=-8$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3\ln x$, $x>0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ο άξονας $y'y$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύουν οι σχέσεις

$$f'(x)=-f(x)+x\,,\ \ x\in\mathbb{R}\quad \text{και}\quad f(0)=0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^x\left(f(x)-x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{-x}+x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.