ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε να αποδείξετε ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο Δ;

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $\overline{(z^\nu)} = (\bar{z})^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

γ) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x} = 1$.

δ) Αν η f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx$$

ε) Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha^x = 0$.

ΘΕΜΑ Β

Έστω $w = z + \dfrac{4}{z}$, όπου z μιγαδικός αριθμός με $z \neq 0$.

Β1. Να βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς z_1 και z_2 για τους οποίους ισχύει $w = 2$.

Β2. Αν $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ και $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ είναι οι μιγαδικοί αριθμοί που βρήκατε στο ερώτημα **Β1,** τότε να αποδείξετε ότι $z_1^3 = z_2^3 = -8$.

Β3. Αν z_1 και z_2 είναι οι μιγαδικοί του προηγούμενου ερωτήματος, τότε να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και $z_3 = \dfrac{z_1^3}{4}$ στο μιγαδικό επίπεδο είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Β4. Αν $|z| = 2$, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός w είναι πραγματικός.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

Γ3. Να αποδείξετε ότι: $xf'(x) < f(x) + \ln 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2\int_0^x f(t)dt = (\ln(x+1))^2, \quad x > -1$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}$, $x > -1$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^e \le e^{x+1}, \quad \text{για κάθε } x > -1$$

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e - 1$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$(x+1)^2 = 2^{x+1} \Leftrightarrow f(x) = f(1), \quad x > -1$$

και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x+1)^2 = 2^{x+1}, \quad x > -1$$

έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $x = 1$ και $x = 3$.