ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Α2. Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Α3. Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Στο μιγαδικό επίπεδο οι εικόνες δύο συζυγών μιγαδικών αριθμών είναι σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β) Μια συνάρτηση f είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της η εξίσωση $f(x)=y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

γ) Αν είναι $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

δ) $(\sigma\varphi x)'=\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x\in\mathbb{R}-\{x\mid \eta\mu x=0\}$.

ε) $\int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx=\left[f(x)g(x)\right]_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx$, όπου f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις:

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4 \quad (1)$$

$$|w-5\bar{w}|=12 \quad (2)$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$.

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$ τότε, να βρείτε το $|z_1+z_2|$.

Β3. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ και στη συνέχεια να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του $|w|$.

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι:

$$1\le|z-w|\le 2$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1$, $x>0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Γ3. Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Γ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία για κάθε $x>0$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $f(x)\neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)\,dt\geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x-x=-\left(\int_1^x \frac{\ln t-t}{f(t)}dt+e\right)\cdot|f(x)|$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Αν είναι $f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$, $x>0$, τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[(f(x))^2\,\text{ημ}\frac{1}{f(x)}-f(x)\right]$.

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας $\ln x\leq x-1$, που ισχύει για κάθε $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$F(x)=\int_\alpha^x f(t)\,dt\ ,\ \ x>0,$$

όπου $\alpha>0$, είναι κυρτή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

$$F(x)+F(3x)>2F(2x)\ ,\ \ \text{για κάθε } x>0$$

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός $\beta>0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\beta,2\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F(\beta)+F(3\beta)=2F(\xi)$$