## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση $f$ παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $(\alpha,\beta)$, με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του $x_0$, στο οποίο όπως η $f$ είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(\alpha,x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0,\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της $f$.

**Α2.** Πότε δύο συναρτήσεις $f$ και $g$ λέγονται ίσες;

**Α3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της $f$.

**β)** Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

**γ)** Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha^x=+\infty$.

**δ)** Αν μια συνάρτηση $f$ δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο $x_0$ τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0$.

**ε)** Έστω $f$ μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $G$ είναι μια παράγουσα της $f$ στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(t)dt=G(\alpha)-G(\beta)$.

## ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z$, με $z\neq-1$, για τους οποίους ο αριθμός $w=\dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

**Β1.** $|z|=1$.

**Β2.** Ο αριθμός $\left(z-\dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

**Β3.** $\left(\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2)\leq 4$, όπου $z_1, z_2$ δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς $z$.

**Β4.** Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $u$, για τους οποίους ισχύει $u-ui=\dfrac{i}{w}-w$, $w\neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2-y^2=1$.

**ΘΕΜΑ Γ**

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $xf(x)+1=e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-1}{x} & , \ x\neq 0\\ 1 & , \ x=0\end{cases}$.

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**Γ3.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f$ στο σημείο $A(0,f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η $f$ είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x)=x+2\,,\ x\in\mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

**Γ4.** Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x(\ln x)\ln(f(x))\right]$.

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με $A=(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(A)=(-\infty,0]$
- η παράγωγος της $f$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, και
- $2f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\dfrac{1}{t}\right)dt+2$, για κάθε $x>0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x f(t)dt$, $x>0$.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$, $x>0$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $F$ έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma(x_0,F(x_0))$, $x_0>0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(x_0,\beta)$ με $\beta>x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $F$ στο σημείο $M(\xi,F(\xi))$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon: F(\beta)x-(\beta-1)y+2012(\beta-1)=0$$

**Δ3.** Αν $\beta>1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5}{x-1}+\frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα $(1,3)$.

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt\le\int_1^x tf(t)dt\,,\ \text{για κάθε}\ x>0$$