

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- A2.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Αν $z \in \mathbb{C}$, τότε $z - \bar{z} = 2\text{Im}(z)$.
- β)** Αν είναι $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = +\infty$.
- γ)** Ισχύει $(\epsilon\phi x)' = -\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \sigma\upsilon\nu x = 0\}$.
- δ)** Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και $g(x_0) \neq 0$, τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$
.
- ε)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $|iz - 1| = 1$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος που έχει κέντρο το σημείο $K(0, -1)$ και ακτίνα $\rho = 1$.
- B2.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z να αποδείξετε ότι $|z| \leq 2$.
- B3.** Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z με $|z_1 - z_2| = \sqrt{2}$ και A, B οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε να αποδείξετε ότι το τρίγωνο KAB , όπου $K(0, -1)$, είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} - 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η f κυρτή.
- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$ έχει ακριβώς μία ρίζα, το 0 .
- Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y = 1$ και $x = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x - 2} = 2$

- $f(0) = 2$ και

- η f' είναι γνησίως αύξουσα

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(2) = f'(2) = 2$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq f(\xi)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ4. Αν επιπλέον δίνεται ότι $f(\xi) > 0$, τότε να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^x f(t) dt = x^2 - 2x, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.