

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.
- A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.
- A3.** Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Ποια σημεία λέγονται κρίσιμα σημεία της f ;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$.
- β)** Αν μια συνάρτηση f είναι $1-1$ στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.
- γ)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (-f(x)) = +\infty$.
- δ)** Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

- ε)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w - 4 - 3i|x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα $x = 1$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο $K(4,3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$.
- B2.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.
- B3.** Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος B1 να αποδείξετε ότι:

$$|z - w| \leq 10 \quad \text{και} \quad |z + w| \leq 10$$

- B4.** Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος B1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}| = 5$$

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x) - 3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

- $f(1) = \frac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f του ερωτήματος Γ1.

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f(5(x^2 + 1)^3 - 8) \leq f(8(x^2 + 1)^2)$$

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^2 - \xi} f(t) dt = -\xi(3\xi^2 - 1)f(\xi^3 - \xi)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, +\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ για κάθε $x > 0$

- $f(x)f'(x) \neq 0$ για κάθε $x > 0$ και $f(0) = 0$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{με } x > 0 \quad \text{και} \quad h(x) = (f'(x))^3 \quad \text{με } x \geq 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)f''(x) + 1 = (f'(x))^2 \quad \text{για κάθε } x > 0$$

Δ2. α. Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0, +\infty)$.

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$.

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι:

α. $g(x) \geq 2 - x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$,

β. $\int_0^1 (2 - x)f(x) dx < 1$.

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.