ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 ισχύει: $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί με $z_1 \neq z_2$, τότε η εξίσωση

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

παριστάνει τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα τα σημεία $A(z_1)$ και $B(z_2)$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.

γ) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = +\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ε) Αν $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$$

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z-1}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, εκτός από ένα σημείο του. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού.

Β2. Αν z_1, z_2 είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του ερωτήματος Β1, να αποδείξετε ότι:

$$|z_1 + z_2 - 4| \leq 2$$

Β3. Από τους μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1, να βρεθούν εκείνοι για τους οποίους ισχύει:

$$|z| = \sqrt{5}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{2}\ln^2 x + x$, $x > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$, και να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Γ2. Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο αριθμό α τέτοιο, ώστε στο διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$ η εξίσωση

$$f\left(x^4+2x\right)=f(4)$$

να έχει μία τουλάχιστον ρίζα.

Γ3. Να λύσετε στο διάστημα $(0,+\infty)$ την ανίσωση

$$x\ln^2 x<2-2x$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$3\int_1^x 2tf(t)dt+x^3=3x^2f(x)+3x-8\ ,\quad x>0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, $x>0$ καθώς επίσης ότι η ευθεία με εξίσωση $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ασύμπτωτη $(y=x)$ της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e^2$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$f'(x)>\frac{f(x)-2}{x-1}\quad \text{για κάθε}\ \ x>1$$