ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z-z_0|=\rho,\ \rho>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(\rho_0)$ και ακτίνα ρ, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \left(\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty\right)$.

γ) Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=0$.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε υποχρεωτικά $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

ε) $\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)\,dt\right)'=f(g(x))g'(x)$, με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $w=\dfrac{2z-i}{2z+i},\ z\neq-\dfrac{i}{2}$
- w: φανταστικός

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{2}$, εκτός από το σημείο $M\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ του κύκλου.

Β2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος **Β1,** να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $|w|=1$.

Β3. Αν είναι $z=\dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι $w^4+iw^7=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}} & , \text{ αν } x>0 \\ 0 & , \text{ αν } x=0 \end{cases}$

Γ1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

Γ3. **i)** Να αποδείξετε ότι, για $x>0$, ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=f(4) \Leftrightarrow x^4=4^x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4=4^x$, $x>0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (2,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)\int_2^{\xi} f(t)dt = f(\xi)\left(\sqrt{2}-f(\xi)\right)$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, $A=(0,+\infty)$ με σύνολο τιμών $f(A)=\mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x \text{ , για κάθε } x \in (0,+\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f.

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3, δίνεται ότι $f^{-1}(x)=e^x\left(x^2-2x+3\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x=1$.

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x), x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία Α και αντίστοιχα, είναι ίσο με 1.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.