

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- A2.** Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Αν z_1, z_2 είναι δύο μιγαδικοί αριθμοί, τότε ισχύει: $\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- β)** Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ , τότε είναι και $1 - 1$ στο διάστημα αυτό.
- γ)** Ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$.
- δ)** Ισχύει: $(\text{συν}x)' = \eta\mu x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ε)** Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[a, \beta]$, τότε: $\int_a^\beta f(t) dt = G(\beta) - G(a)$.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει: $|z + 4| = 2|z + 1|$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = 2$.
- B2.** Αν z_1 ο πραγματικός αριθμός με $\text{Re}(z_1) > 0$ και z_2 ο φανταστικός αριθμός με $\text{Im}(z_2) < 0$ είναι δύο από τους μιγαδικούς αριθμούς του **ερωτήματος B1**, τότε να αποδείξετε ότι:
- $$z_1 = 2 \quad \text{και} \quad z_2 = -2i$$
- B3.** Αν z_1, z_2 είναι οι μιγαδικοί αριθμοί του **ερωτήματος B2**, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$.

- Γ1.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
- Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:
- $$\text{ex}f(x) \leq 1 \quad \text{για κάθε} \quad x > 0$$
- Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{1}{e}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο \mathbb{R} .

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x) = 0$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 0$ και $x_2 = 1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,1)$ και, στη συνέχεια, να λύσετε στο διάστημα $(0,1]$ την εξίσωση:

$$\int_1^x f(t) dt = x - 1$$