

## ΘΕΜΑ Α

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[α,β]$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[α,β]$  και
- $f(α) \neq f(β)$ ,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό  $\eta$  μεταξύ των  $f(α)$  και  $f(β)$  υπάρχει ένας τουλάχιστον  $x_0(α,β)$ , τέτοιος ώστε  $f(x_0) = \eta$ .

**A2.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  και  $x_0$  ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$ ;

**A3.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  παρουσιάζει στο  $x_0(α,β)$  τοπικό ελάχιστο;

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν για δύο συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  ορίζονται οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$ , τότε ισχύει πάντοτε ότι  $f \circ g = g \circ f$ .

**β)** Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών  $α+βi$  και  $γ+δi$  είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

**γ)** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει ότι  $(\sin x)' = \eta \mu x$ .

**δ)** Έστω  $f$  μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $[α,β]$ . Αν ισχύει ότι  $f(x) \geq 0$  για κάθε  $x \in [α,β]$  και η συνάρτηση  $f$  δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ .

**ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  και  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ .

## ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$  για τους οποίους ισχύει:  $|z - 4| = 2|z - 1|$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών  $z$  είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $\rho = 2$ .

**B2.** Έστω  $w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$ , όπου  $z_1, z_2$  δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος **B1**.

Να αποδείξετε ότι:

**α)** Ο  $w$  είναι πραγματικός και

**β)**  $-4 \leq w \leq 4$ .

- B3.** Αν  $w = -4$ , όπου  $w$  είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος **B2**, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$  και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές τις εικόνες  $A(z_1), B(z_2), \Gamma(z_3)$ , των μιγαδικών αριθμών  $z_1, z_2$  και  $z_3$ , με  $z_3 = 2iz_1$ , είναι ισοσκελές.

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$ .

- Γ1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα  $(0, +\infty)$ .

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι  $\int_{2x}^{4x} f(t) dt < 2xf(4x)$  για κάθε  $x > 0$ .

- Γ4.** Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \int_{2x}^{4x} f(t) dt & , x > 0 \\ 2 & , x = 0 \end{cases}$ .

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[0, +\infty)$ .

### ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύουν:

- $f'(x) [e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και
- $f(0) = 0$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}), x \in \mathbb{R}$ .

- Δ2. α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

- β)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , την ευθεία  $y = x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

- Δ3.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \left( e^{\int_0^x f^2(t) dt} - 1 \right) \ln |f(x)| \right]$ .

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1 - 3 \int_0^{x-2} f(t^2) dt}{x-3} + \frac{8 - 3 \int_0^x f^2(t) dt}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο  $(2, 3)$ .