ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ, και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Α2. Πότε μια συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση $1-1$;

Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $z\in\mathbb{C}$, τότε $\overline{\left(z^{\nu}\right)}=\left(\overline{z}\right)^{\nu}$, όπου ν θετικός ακέραιος.

β) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x)\le g(x)$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2, της οποίας η γραφική παράσταση έχει ασύμπτωτη.

ε) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$ και G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε πάντα ισχύει: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt=G(\alpha)-G(\beta)$.

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $|z-3i|^2-18=|z-3|^2$
- $|w-i|=\mathrm{Im}(w)+1$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι η ευθεία με εξίσωση $x-y-3=0$.

Β2. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w είναι η παραβολή με εξίσωση $y=\frac{1}{4}x^2$.

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w να βρείτε την ελάχιστη τιμή του μέτρου $|z-w|$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}-\ln x,\ x\in(0,+\infty)$.

Γ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g με

$$g(x)=\int_1^{h(x)}\sqrt{t^2-1}\,dt\,,$$

όπου $h(x)=f(x^2+1)-f(2)+1$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(f(x)-\frac{1}{2}\right)=1$$

έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες x_1, x_2.

Γ4. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 του ερωτήματος **Γ3** ισχύει ότι $x_1<x_2$, τότε να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(x_1,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $M\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x^2-x)\cdot f'(x)+x\cdot f(x)=1\,,\ \text{για κάθε}\ x\in(0,+\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x-1} & , \quad 0<x\neq 1\\ 1 & , \quad x=1\end{cases}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt=\int_{\frac{1}{x}}^1\frac{f(t)}{t}\,dt$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Δ3. **α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\displaystyle g(x)=-\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{f(t)}{t}\,dt$, $x\in(0,+\infty)$ είναι κοίλη.

β. Έστω E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο που η γραφική παράσταση της g τέμνει τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=3$. Να αποδείξετε ότι $E<2$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x f(t)\,dt\geq\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^x tf(t)\,dt$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Πανελλαδικές Εξετάσεις

Εκδόσεις Πατάκη