ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Α2. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Το μέτρο της διαφοράς δύο μιγαδικών αριθμών είναι ίσο με την απόσταση των εικόνων τους.

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.

γ) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε ισχύει πάντοτε $f\circ g=g\circ f$.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}_2=\mathbb{R}-\{x\,|\,\eta\mu x=0\}$ ισχύει $(\sigma\varphi x)'=-\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.

ΘΕΜΑ Β

Αν ο μιγαδικός αριθμός z είναι ρίζα της εξίσωσης $3x^2+\alpha x+3=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$ με $-6<\alpha<6$, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $|z|=1$.

Β2. Να αποδείξετε την ισότητα $|z-1|^2+|z+1|^2=4$ και να την ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Β3. Αν επιπλέον $\mathrm{Re}(z)=\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την τιμή του α.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{x}$, $x>0$.

Γ1. Να βρείτε τις οριζόντιες και κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f, εάν υπάρχουν.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=e, x=2e$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)=2xe^{-x}-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $f(1)=e^{-1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[0,+\infty)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2=2e^{x-2}$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Δ4. Δεδομένου ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο διάστημα $(-\infty,0]$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(-1,f(-1))$ και να αποδείξετε ότι

$$f(x)+2e+3ex\geq 0 \quad \text{για κάθε} \quad x\leq 0$$