ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

A3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y=\ell$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$.

β) Αν $f(x)=\ln|x|$ για κάθε $x\neq 0$, τότε $f'(x)=\dfrac{1}{|x|}$ για κάθε $x\neq 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_o τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o

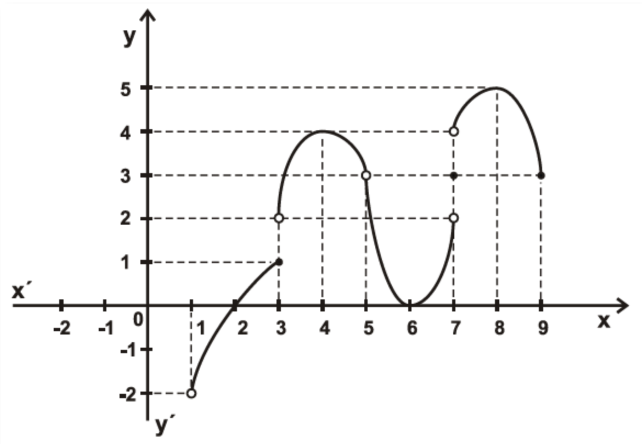
δ) Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού $\nu\geq 2$, η οποία έχει ασύμπτωτη.

ε) Για κάθε συνάρτηση f, συνεχή στο $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

$$\text{αν } \int_\alpha^\beta f(x)dx>0, \text{ τότε } f(x)>0 \text{ στο } [\alpha,\beta].$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f.

B2. Να βρείτε αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ **β)** $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ **γ)** $\lim\limits_{x\to 5}f(x)$ **δ)** $\lim\limits_{x\to 7}f(x)$ **ε)** $\lim\limits_{x\to 9}f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{f(x)}$ β) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{1}{f(x)}$ γ) $\lim\limits_{x\to 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Β5. Να βρείτε τα σημεία x_o του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_o)=0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνάρτηση $1-1$ και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}.

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει: $f(\eta\mu x)>f\left(x-\dfrac{1}{6}x^3\right)$.

Γ3. Ένα σημείο Μ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$, $x\ge 0$ με $x=x(t)$ και $y=y(t)$. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$ του Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης $x(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\ge 0$.

Γ4. Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln x}{x}, & 0<x<1\\ 1, & x=1\\ \dfrac{\ln x}{x-1}, & x>1\end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Δ2. Να αποδείξετε ότι το $x_o=1$ είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της f.

Δ3. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,+\infty)$.

ii) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=x_o$, όπου x_o η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι

$$E=\frac{-x_o^2-2x_o+2}{2}$$

Δ4. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $[1,+\infty)$ να αποδείξετε ότι

$$(x+1)F(x)>xF(1)+F(x^2),\quad \text{για κάθε } x>1$$