

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x \mid \sin x = 0\}$ ισχύει $(\epsilon\phi x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.
- A2.** Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;
- A3.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.
- β)** Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f , για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .
- γ)** Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f .
- δ)** Για κάθε συνάρτηση f που είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ ισχύει $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \Delta$.
- ε)** Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε ισχύει: $\int_a^\beta f(x) dx = -\int_\beta^a f(x) dx$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x - 1}{x + 1}$, $x \neq -1$, όπου το α είναι ένας πραγματικός αριθμός.

- B1.** Να βρείτε την τιμή του α , ώστε η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $A(3, 2)$.
Αν $\alpha = 3$ τότε:
- B2.** Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.
- B3.** Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $f^{-1}(x) = \frac{x+1}{3-x}$, $x \neq 3$.
- B4.** Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 - \frac{1}{x-2}$, $x > 2$.

- Γ1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο διάστημα $(2, +\infty)$.
- Γ2.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y = x + 1$, $x = \lambda$ και $x = \lambda + 1$ με $\lambda > 2$.

Γ4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in (2, +\infty)$ ισχύει $E(\lambda) > \ln 2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ \frac{\ln x}{x-1} & , \quad 0 < x \neq 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$.

Δ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(e^x)}{e^{f(x)}}$.