

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- A2.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής στο x_0 , είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»
- α.** Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.
- β.** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.
- A3.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ τότε
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0.$$
- β)** Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A , B αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.
- γ)** Για κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- δ)** Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha^x = +\infty$.
- ε)** Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.
- B2.** Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0, 1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.
- B3.** Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμψής.
- B4.** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\eta\mu x$, $x \in [0, \pi]$, και το σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτομένες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ της γραφικής παράστασης της f που άγονται από το A , τις οποίες και να βρείτε.

Γ2. Αν $(\varepsilon_1): y = -x$ και $(\varepsilon_2): y = x - \pi$ είναι οι ευθείες του ερωτήματος **Γ1**, τότε να σχεδιάσετε τις $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και τη γραφική παράσταση της f , και να αποδείξετε ότι $\frac{E_1}{E_2} = \frac{\pi^2}{8} - 1$, όπου:

- E_1 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τις ευθείες και
- E_2 είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και τον άξονα x' .

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi}$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > e - 1 - \pi$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x^4}, & x \in [-1, 0) \\ e^x \eta\mu x, & x \in [0, \pi] \end{cases}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα στο διάστημα $[-1, \pi]$ και να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της.

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ3. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τη γραφική παράσταση της g , με $g(x) = e^{5x}$, $x \in \mathbb{R}$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x = \pi$.

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2}$.