ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_o ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_o και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι $f'(x_o)=0$.

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f ορισμένη και δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν για κάποιο $x_o \in \mathbb{R}$ ισχύει $f''(x_o)=0$, τότε το x_o είναι θέση σημείου καμπής της f».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι αληθής, ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι ψευδής.

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α).**

Α3. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη φράση η οποία συμπληρώνει σωστά την ημιτελή πρόταση:

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε

α) η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει λύση στο (α,β).

β) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία λύση στο (α,β).

γ) η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο (α,β).

δ) δεν μπορούμε να έχουμε συμπέρασμα για το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=0$ στο (α,β).

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx = G(\alpha)-G(\beta)$.

β) Μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1<x_2$, ώστε $f(x_1)<f(x_2)$.

γ) Αν ένα σημείο $M(\alpha,\beta)$ ανήκει στη γραφική παράσταση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε το σημείο $M'(\beta,\alpha)$ ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1}.

δ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο (α,β), αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

ε) Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$, τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=\dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

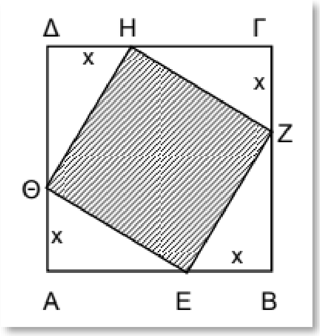
Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

Β4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x h(x)dx$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος με πλευρά 2 cm. Αν το τετράγωνο ΕΖΗΘ έχει τις κορυφές του στις πλευρές του ΑΒΓΔ:



Γ1. Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ συναρτήσει του x.

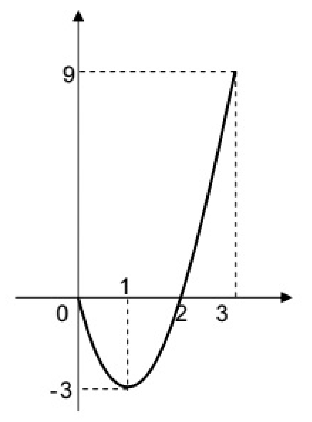
Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ δίνεται από τη συνάρτηση: $f(x)=2x^2-4x+4,\ 0\le x\le 2$.

Γ3. Να βρείτε για ποιες τιμές του x το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο και για ποιες μέγιστο.

Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει $x_o\in[0,2]$, για το οποίο το εμβαδόν $f(x_o)$ του αντίστοιχου τετραγώνου ΕΖΗΘ ισούται με $4e^{x_o}+1\,\text{cm}^2$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση f, ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[0,3]$, για την οποία γνωρίζετε τα εξής:



- Η γραφική παράσταση της f' δίνεται στο διπλανό σχήμα:
- $f(0)=2,\ f(1)=0$
- Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f' και των ευθειών $x=0$ και $x=3$ ισούται με 8 τ.μ.
- Η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο διάστημα $[0,3]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(3)=2,\ f(2)=-2$ και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\ln x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x)-2}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Δ2. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα, κυρτή, κοίλη και τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και σημείων καμπής της f.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o\in(2,3)$ για το οποίο δεν υπάρχει δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{1}{f(x)}$.

Δ4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.