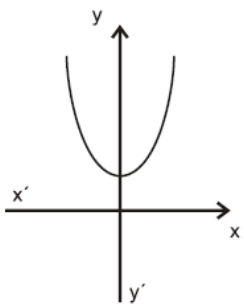
ΘΕΜΑ Α

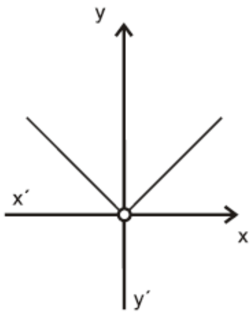
Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)$, να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β).

Α2. Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το Α;

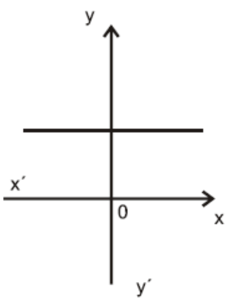
Α3. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, F, G, H, T.



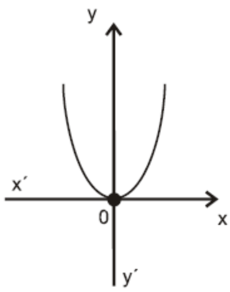
(f)



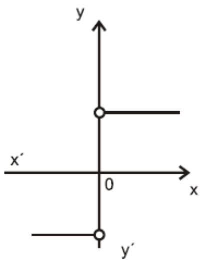
(g)



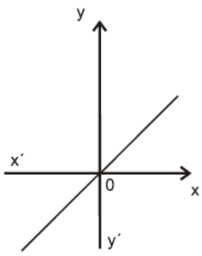
(F)



(G)



(H)



(T)

Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις F, G, H, T μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης f και ποια της g.

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων $f, g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, αν ισχύει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=-\infty$ τότε $\lim\limits_{x\to 0}\left[f(x)+g(x)\right]=0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.

β) Αν μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της f το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$, τότε ορίζεται η $f \circ g$ με πεδίο ορισμού το $[0,1]$ και σύνολο τιμών το $[2,3]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x+1}{x} &, \ x>1 \\ x^2+\alpha &, \ x\le 1 \end{cases}$.

Β1. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι $\alpha = 1$.

Β2. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2},4\right]$.

Β3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y=-\dfrac{1}{4}x+2018$ και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\eta\mu x - x$.

Γ1. Να βρείτε τα ακρότατα της f (τοπικά και ολικά).

Γ2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_o \in [0,\pi]$ η γραφική παράσταση της f και η εφαπτομένη της στο $A(x_o, f(x_o))$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sigma\upsilon\nu x \, dx$.

Γ4. **α)** Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(f(x)-f(2x)\right)\cdot \ln x\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\ln(1+x)>\dfrac{x}{x+1}$, για κάθε $x>0$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(0,1)$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)>2^{f(x)}-1$, για κάθε $x>0$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1}+\frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2}+\frac{\eta\mu(\pi\alpha)}{x}=0,\ \text{όπου}\ \ 0<\alpha<1,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς x, μια στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,2)$.

Δ5. Αν F είναι μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $(0,+\infty)$ με $F(e)=e\cdot\ln 2$, να αποδείξετε ότι

$\ln 2<F(1)<\ln\left(\dfrac{2^{e+1}}{e+1}\right)$.