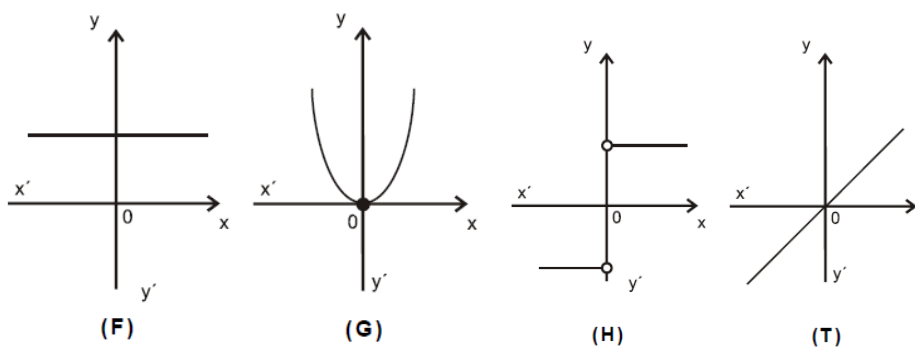
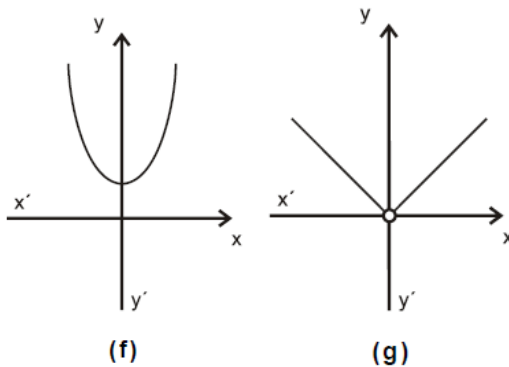


## ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω  $f$  μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ , στο οποίο όμως η  $f$  είναι συνεχής. Αν η  $f'(x)$  διατηρεί πρόσημο στο  $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ , να αποδείξετε ότι το  $f(x_0)$  δεν είναι τοπικό ακρότατο και ότι η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $(\alpha, \beta)$ .
- A2.** Έστω  $A$  ένα μη κενό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ . Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το  $A$ ;
- A3.** Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων  $f, g, F, G, H, T$ .



Να γράψετε στο τετράδιό σας ποια από τις συναρτήσεις  $F, G, H, T$  μπορεί να είναι η παράγωγος της συνάρτησης  $f$  και ποια της  $g$ .

- A4.** Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε ζεύγος πραγματικών συναρτήσεων  $f, g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , αν ισχύει  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$  και

$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$  τότε  $\lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 0$ ».

- α)** Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **A**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.
- β)** Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**.
- A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μπορεί να τέμνει μια ασύμπτωτή της.
- β)** Αν μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι  $1-1$ , τότε κάθε οριζόντια ευθεία τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  το πολύ σε ένα σημείο.

γ) Αν οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  έχουν πεδίο ορισμού το  $[0,1]$  και σύνολο τιμών το  $[2,3]$ , τότε ορίζεται η  $f \circ g$  με πεδίο ορισμού το  $[0,1]$  και σύνολο τιμών το  $[2,3]$ .

### ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & , x > 1 \\ x^2 + \alpha & , x \leq 1 \end{cases}$ .

**B1.** Να υπολογίσετε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής.

Στα παρακάτω ερωτήματα θεωρήστε ότι  $\alpha = 1$ .

**B2.** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση  $f$  ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$ .

**B3.** Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη προς την ευθεία  $y = -\frac{1}{4}x + 2018$  και να γράψετε τις εξισώσεις των εφαπτομένων στα σημεία αυτά.

**B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$  και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση.

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .

**Γ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  αντιστρέφεται και ότι το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$  είναι το διάστημα  $(e, +\infty)$ .

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\alpha)}{x-1} + \frac{f^{-1}(\alpha)}{x-2} + \frac{\eta\mu\alpha - 2}{x} = 0, \text{ όπου } \alpha > e,$$

έχει ακριβώς δύο ρίζες ως προς  $x$ , μια στο διάστημα  $(0,1)$  και μία στο διάστημα  $(1,2)$ .

**Γ3.** Να αποδείξετε ότι  $f(x) + 1 > e + \ln f(x)$  για κάθε  $x > 1$ .

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $f(x) = 2\eta\mu x - x$ .

**Δ1.** Να βρείτε τα ακρότατα της  $f$  (τοπικά και ολικά).

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x_0 \in [0, \pi]$  η γραφική παράσταση της  $f$  και η εφαπτομένη της στο  $A(x_0, f(x_0))$  έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.

**Δ3.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_0^\pi f(x) \cdot \sin x \, dx$ .

**Δ4. α)** Να αποδείξετε ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$ .

**β)** Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow \infty} [(f(x) - f(2x)) \cdot \ln x]$ .