ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β), να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ .Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ για x κοντά στο x_o.

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και $g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Β2. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $g\circ f$ στο $+\infty$.

Β3. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_o=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\dfrac{(g\circ f)(x)}{x-2}$.

Β4. Έστω η συνάρτηση $\varphi(x)=\begin{cases}(g\circ f)(x) & , \quad x\in A\\ 1-x^2 & , \quad x\in(-1,1)\end{cases}$.

Να εξετάσετε αν πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $t(x)=\varphi(x)\cdot\eta\mu(\pi x)$ στο διάστημα $[0,2]$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot f'(x)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$. Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A την μικρότερη απόσταση.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, την εφαπτομένη της C_f στο σημείο M και τον άξονα $x'x$.

Γ4. Δίνεται επιπλέον μια συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $0<g(x)<1$ για κάθε $x\geq 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μοναδική ρίζα x_o, η οποία ανήκει στο $(0,1)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\frac{1}{2}$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 2f^2(x)\,dx<1$.

Δ4. Να λύσετε στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ την εξίσωση: $f\left(\eta\mu^2 x\right)+f\left(\sigma\upsilon\nu^2 x\right)=f\left(\varepsilon\varphi x\cdot e^{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}\right)$.