ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_o, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_o) και $f'(x)<0$ στο (x_o,β), να αποδείξετε ότι το $f(x_o)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η γραφική παράσταση της $|f|$ αποτελείται από τα τμήματα της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται πάνω στον άξονα $x'x$ και από τα συμμετρικά, ως προς τον άξονα $x'x$, των τμημάτων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από τον άξονα.

β) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, ισχύει:

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=0$ τότε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

γ) Ένα τοπικό μέγιστο μιας συνάρτησης f μπορεί να είναι μικρότερο από ένα τοπικό ελάχιστο της f.

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)>0$ τότε $f(x)>0$ για x κοντά στο x_o.

ε) Μια πολυωνυμική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ διατηρεί πρόσημο σε κάθε ένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^2+1$ και $g:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x-2}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g\circ f$ έχει πεδίο ορισμού το $A=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ και τύπο $(g\circ f)(x)=\sqrt{x^2-1}$.

Β2. Να εξετάσετε εάν υπάρχει το όριο στο $x_o=2$ της συνάρτησης $h:A-\{2\}\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\frac{(g\circ f)(x)}{x-2}$.

Β4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g\circ f$ στο σημείο με τετμημένη $x_1=\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι $f(x)\cdot f'(x)=\frac{1}{2}$ για κάθε $x>0$ και της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $M(1,1)$. Έστω το σημείο $A\left(\frac{3}{2},0\right)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι το σημείο M είναι το μοναδικό σημείο της C_f που απέχει από το σημείο A την μικρότερη απόσταση.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο M είναι κάθετη στην ευθεία AM.

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x=1$ και την ευθεία $x=2$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)+f(1-x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$ ισούται με $\dfrac{1}{2}$.