ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_0)=\eta$.

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)>0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α).**

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^{2\nu+1}}\right)=+\infty$, για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B, αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται, αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{|x|}$, $x\in\mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της C_f, του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ \text{με τύπο}\ f(x)=\frac{x+2}{x-1}\quad \text{και}\quad g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ \text{με τύπο}\ g(x)=e^x$$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$.

Β2. Αν $(f\circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι «1 – 1» και να βρείτε την αντίστροφή της.

Β3. Αν $\varphi(x)=(f\circ g)^{-1}(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Β3 , να βρεθούν τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+}\varphi(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda & , \quad x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x & , \quad 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$, με $\lambda>0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\dfrac{\pi}{4}$.

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha,f(\alpha))$, με $\alpha\le 0$ κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t)=-\dfrac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Μ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο Β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο Μ έχει τετμημένη -1.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^x+x^2-ex-1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι: $f(x_0)=x_0^2-(e+2)x_0+e-1$.

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]$.

Δ3. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+x=x_0$ για $x\in(x_0,1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

Δ4. Αν x_0 είναι το σημείο του ερωτήματος Δ1 που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος Δ3, να αποδείξετε ότι $f(x_0)>f(\rho)(f'(k)+1)$ για κάθε $k\in(\rho,1)$.