

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Αν οι συναρτήσεις f , g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.
- A2.** Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;
- A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
- β)** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = -\infty$.
- γ)** Για κάθε συνάρτηση f , το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f , εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f .
- δ)** $(\ln|x|)' = -\frac{1}{x}$, για κάθε $x < 0$.
- ε)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ .

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \alpha$ και $g(x) = x + \beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$$(f \circ g)(x) = x^2 - 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta = -1$.
- B2.** Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f , g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.
- B3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.
- B4.** Έστω η συνάρτηση $h: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x) + 2 \leq h(x) \leq g(x) + 2$, για κάθε $x \in [0,1]$.
- i.** Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2$.
- ii.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.
- Γ2.** Έστω $(\varepsilon): y = 3x - 2$ η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος **Γ1**. Έστω ακόμα ευθεία (ζ) η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο $M(0, \alpha)$ με $-2 < \alpha < 2$. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες $x = -1$ και $x = 1$ υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f .
- Γ3.** Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο M ξεκινά από το σημείο $N(-2, -8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων O . Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x) \cdot \sin^3 x + f'(x) \cdot \sin^2 x \cdot \eta\mu x - 1 = 0$, για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x - \varepsilon\phi x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι σταθερή.

Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{\eta\mu x} + \frac{1}{\sin x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0 = \frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε.
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 3\sqrt{2}$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.
- Δ4.** Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2 - \pi) > 4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος **Δ3**.