ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = -\infty$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

δ) $\left(\ln|x|\right)' = -\dfrac{1}{x}$, για κάθε $x<0$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x+1$ και $g(x)=x+2$, για τις οποίες ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρεθεί η αντίστροφή της, f^{-1}.

Β3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

Β4. Να βρεθεί το όριο $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{f(x)}-2}{x^2-9}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1}+\alpha x & , \ x\ge0\\ x^2-\alpha & , \ x<0\end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=-1$.

Γ2. Να εξετάσετε αν το σημείο $x_0=0$ είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

Γ3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η κλίση της στο σημείο $M(x,f(x))$ είναι $3x^2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2,f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Δ3. Ένα υλικό σημείο $M(x,x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t)>0$. Το σημείο Μ ξεκινά από το σημείο $N(-2,-8)$ και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;