ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, και ισχύει $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A και A_1 το σύνολο των σημείων του A στα οποία αυτή είναι παραγωγίσιμη. Πώς ορίζεται η πρώτη παράγωγος της f;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f με $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ ».

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α).**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ για κάθε x κοντά στο x_0.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$, τότε $f(\alpha)\neq f(\beta)$.

γ) Για κάθε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$, $x\in\mathbb{R}-\{3\}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται στο $\mathbb{R}-\{3\}$.

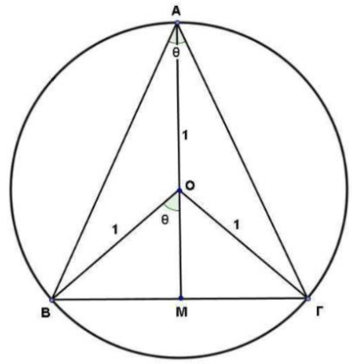
Β2. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

Β3. Να αποδείξετε ότι $(f\circ f)(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{3\}$.

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\left(f(x)\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right)$.

ΘΕΜΑ Γ

Ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα 1, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν θ είναι η γωνία μεταξύ των ίσων πλευρών του τριγώνου και $\hat{BOM} = \theta$, τότε:



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση της γωνίας θ είναι:

$$E(\theta) = (1 + \text{συν}\theta)\,\text{ημ}\theta,\ \theta \in (0, \pi)$$

Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας $\theta \in (0, \pi)$, για την οποία το εμβαδόν του τριγώνου μεγιστοποιείται.

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο γωνίες θ_1, θ_2, με $\theta_1 < \theta_2$, για τις οποίες το εμβαδόν του τριγώνου ισούται με $\frac{3}{4}$.

Γ4. Για τις γωνίες θ_1, θ_2, του ερωτήματος **Γ3,** να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, \pi)$ τέτοια, ώστε:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2)$$

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x\ln x - \ln(\lambda x),\ \ x \in (0, +\infty),\ \lambda \in (0, +\infty) \ \ \text{και}$$

$$g(x) = x^x,\ \ x \in (0, +\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια, να βρείτε την ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο ακρότατου της f, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$.

Δ2. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή του $\lambda > 0$ για την οποία ισχύει $x^x \ge \lambda x$, για κάθε $x > 0$.

Για τα ερωτήματα Δ3 και Δ4 θεωρήστε ότι $\lambda = 1$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = \lambda x$ είναι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_g της g, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δ4. Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} x^x &, \ x > 0 \\ 1 &, \ x = 0 \end{cases}$.

Να αποδείξετε ότι:

i. Η h είναι συνεχής

ii. Η εξίσωση $x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)\,dt\right) + (1 - x)\int_0^1 h(1 - t)\,dt = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.