ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x_0)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x_0)<0$ στο (x_0,β), τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α).**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και $f(x)<g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Αν η f είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, η οποία δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό και $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε η f παίρνει δύο τουλάχιστον ετερόσημες τιμές στο $[\alpha,\beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=(x+\alpha)^2-1,\ x\in[-1,+\infty),\ \alpha\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$.

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ είναι ίση με 2, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}.

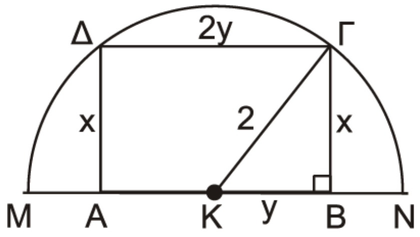
Αν $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1,\ x\in[-1,+\infty)$, τότε:

Β3. Να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$.

Β4. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f^{-1}(x)+1}{(f^{-1}\circ g)(x)}$, όπου $(f^{-1}\circ g)(x)=|x|-1,\ x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και διάμετρο $\text{MN} = 4$ cm. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x cm και 2y cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x , είναι

$$E(x) = 2\sqrt{4x^2 - x^4},\ x \in (0,2)$$

Γ2. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \left(E(x) - 2\sqrt{3}\right)e^x,\ x \in (0,2)$ έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $\left(\sqrt{2}, \sqrt{3}\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει: $x \cdot f(x) = \text{συν}x - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{συν}x - 1}{x} &, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0 &, \quad x = 0 \end{cases}$.

Δ2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2020 \cdot \text{συν}x - x = 2020$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Δ5. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της f στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ με $F(0) = \rho$, όπου ρ η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **(Δ4).** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ισχύει: $\pi \cdot |F(x)| \le 2 \cdot |x|$.