ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Α3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x=x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Α4. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ ισχύει $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.»

α) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α,** αν είναι **αληθής,** ή το γράμμα **Ψ,** αν είναι **ψευδής.**

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **(α).**

Α5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$ ισχύει $f\circ g=g\circ f$.

β) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων f, g για τις οποίες υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ και $f(x)<g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0, ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

γ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha,\beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m.

δ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0\}$, ισχύει $\left(\ln|x|\right)'=\dfrac{1}{|x|}$.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=\int_\alpha^\gamma f(x)dx+\int_\gamma^\beta f(x)dx$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=(x+\alpha)^2-1$, $x\in[-1,+\infty)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ και $g(x)=x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$.

Αν η κλίση της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο με τετμημένη $x_0=2$ είναι ίση με 2, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της f^{-1}.

Β3. Αν $f^{-1}(x)=\sqrt{x+1}-1$, $x\in[-1,+\infty)$, τότε να βρείτε τη συνάρτηση $f^{-1}\circ g$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{\alpha x}$, $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ και $g(x)=e\ln(x+1)$, $x\in(-1,+\infty)$.

Η ευθεία $(\varepsilon): y=ex$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία $x=1$.

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ να ισχύει:

$$x\cdot f(x)=\text{συν}x-1$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}, & x\in\left[-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\\ 0, & x=0\end{cases}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $x\text{ημ}x+\text{συν}x\geq 1$ για κάθε $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2020\cdot\text{συν}x-x=2020$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.