

ΘΕΜΑ Α

- A1.** Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Να αποδείξετε ότι αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
- A3.** Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Ισχύει $|\eta\mu x| < |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.
- β)** Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.
- γ)** Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- δ)** Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .
- ε)** Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή, M , και μια ελάχιστη τιμή, m .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.
- B4.** Να βρείτε:
- (i)** το σύνολο τιμών της συνάρτησης f ,
- (ii)** το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1 & , \quad x \leq 0 \\ \sin x & , \quad 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$, με $\alpha < -3$.

- Γ1.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

- Γ2. (i)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.
- (ii)** Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$.
- Γ3.** Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- Γ4.** Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

- Δ1.** Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x}$ (1) έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x+1) - \ln x - 1$.

- Δ2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , το $f(x_0) = 0$.
- Δ3.** Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x) = x \cdot e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$, $x \in \mathbb{R}$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.
- Δ4.** Έστω η συνάρτηση $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$ με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ .