

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = 0$  για κάθε  $x$  εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ ,

να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι σταθερή σε όλο το διάστημα  $\Delta$ .

**A2.** Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ ;

**A3.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f$ ,  $g$  είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού  $A$  και  $B$  αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\frac{f}{g}$  είναι το  $A \cap B$ .

**β)** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε  $f'(x_0) = 0$ .

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$ , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , παρουσιάζει στο σημείο  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  καμπή, τότε  $f''(x_0) = 0$ .

**δ)** Για οποιαδήποτε συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , με  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , ισχύει ότι  $f(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ε)** Κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι συνεχής σε σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$  και η συνάρτηση  $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = \sqrt{x}$ .

**B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφη της είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \left( \frac{x-1}{x} \right)^2, \quad x < 0.$$

**B2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $h = g \circ f^{-1}$  είναι η  $h(x) = \frac{x-1}{x}$ ,  $x < 0$ .

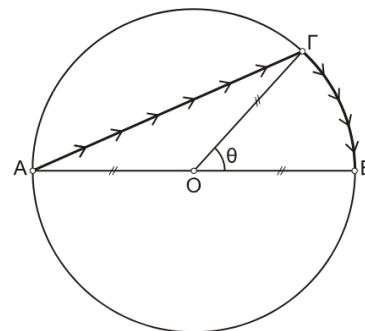
**B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης  $h$  του ερωτήματος B2.

**B4.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( e^{-h(x)} \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ , όπου  $h$  είναι η συνάρτηση του ερωτήματος B2.

## ΘΕΜΑ Γ

Κυκλική λίμνη έχει κέντρο  $O$  και ακτίνα  $R = 1$  km. Ένας μαθητής μπορεί να κωπηλατεί με σταθερή ταχύτητα  $v_1 = 2$  Km/h και μπορεί να βαδίζει με σταθερή ταχύτητα  $v_2 = 4$  Km/h.

Ο μαθητής θέλει να κάνει μια βόλτα στη λίμνη, ξεκινώντας από το σημείο  $A$  του σχήματος και καταλήγοντας στο αντιδιαμετρικό του σημείο  $B$ .



Ο μαθητής μπορεί:

- I. Να συνδυάσει κωπηλασία και βάδισμα, κωπηλατώντας ευθύγραμμα από το σημείο  $A$  σε σημείο  $\Gamma$  της περιφέρειας της λίμνης, τέτοιο ώστε η γωνία  $\widehat{BO\Gamma} = \theta$ ,  $\theta \in (0, \pi)$  και στη συνέχεια να βαδίσει κατά μήκος του τόξου  $\Gamma B$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.
- II. Να κωπηλατήσει ευθύγραμμα από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$  ( $\theta = 0$ ).
- III. Να βαδίσει στην περιφέρεια της λίμνης από το  $A$  στο  $B$  ( $\theta = \pi$ ).

Γ1. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος (σε ώρες) που χρειάζεται, για να διανύσει την παραπάνω διαδρομή, ως συνάρτηση της γωνίας  $\theta$  (σε ακτίνια) είναι:  $t(\theta) = \frac{1}{4}\theta + \text{συν}\frac{\theta}{2}$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ .

Δίνεται ότι σε έναν κύκλο ακτίνας  $R$  το μήκος  $S$  ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία  $\theta$  (σε ακτίνια) είναι  $S = R \cdot \theta$ .

- Γ2. Να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta$  ώστε ο χρόνος της βόλτας του μαθητή να γίνεται μέγιστος.
- Γ3. Σε ποια από τις επιλογές (I), (II) ή (III) ο χρόνος μετάβασης από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$  είναι ο ελάχιστος δυνατός; Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = e^x$  και συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = -x^2 + ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , για την οποία το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{-g(x)} + ax)$  υπάρχει στο  $\mathbb{R}$ .

- Δ1. Να αποδείξετε ότι  $a = -1$ .
- Δ2. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  που διέρχεται από το σημείο  $M(-1, 0)$  είναι η ευθεία  $(\varepsilon): y = x + 1$ .  
Στη συνέχεια, να αποδείξετε ότι η ευθεία  $(\varepsilon)$  εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $g$ .
- Δ3. Να αποδείξετε ότι  $f(x) > g(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .
- Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:  $\frac{f(x-1) - x}{x-k} + \frac{f(x) - g(x)}{x-k-1} = 0$ ,  $k \in \mathbb{R} - \{1\}$  έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα  $(k, k+1)$ .