

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε x εσωτερικό σημείο του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

A2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$;

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f , g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

β) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

γ) Αν μια συνάρτηση f , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ καμπή, τότε $f''(x_0) = 0$.

δ) Για οποιαδήποτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, ισχύει ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-1}{x} \right)^2, \quad x < 0.$$

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h = g \circ f^{-1}$ είναι η $h(x) = \frac{x-1}{x}$, $x < 0$.

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης της συνάρτησης h του ερωτήματος B2.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

- Γ1. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Γ2. Να μελετηθεί η f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- Γ3. Να βρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- Γ4. Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=k$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του k .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=e^x$, $g(x)=-x^2-x$.

- Δ1. Να αποδείξετε ότι η μοναδική εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f που διέρχεται από το σημείο $M(-1,0)$ είναι η ευθεία $(\varepsilon):y=x+1$.
- Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .
- Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)>g(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.