

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, με $c \in \mathbb{R}$.

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $0 < a < 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και ισχύει $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$.

ε) Αν $\int_a^\beta f(x) dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [a, \beta]$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

B2. Αν $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι «1-1» και να βρείτε την αντίστροφη h^{-1} συνάρτηση της h .

B3. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x} & , x \in [0,1) \\ \frac{1}{2} & , x = 1 \end{cases}$.

i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$.

ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Δίνεται ακόμη ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x) = \begin{cases} -2 & , x < -1 \\ 3x^2 - 1 & , x > -1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & , x \leq -1 \\ x^3 - x & , x > -1 \end{cases}$.

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης f σε σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2 .

Γ3. Έστω $y = 2x - 2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x, y)$ με $x > 2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα E το εμβαδόν του τριγώνου MKG , όπου K είναι η προβολή του σημείου M στον άξονα $x'x$ και G είναι το σημείο με συντεταγμένες $(2, 0)$. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $B(3, 4)$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή t_0 .

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x - \ln(3x)$.

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 , με $x_1 < 1 < x_2$.

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2 - x_1) < 0$.

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.