ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό,** αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx\geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0)=0$.

δ) Ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbb{R}^*=\mathbb{R}-\{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{|x|},\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}^*$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=\frac{x}{x-1}$ και $g(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\ln x$.

Β1. Να βρείτε, αν υπάρχουν τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e,e^2).

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi=g\circ f$.

Β4. Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Αν $\varphi(x)=\ln x-\ln(x-1)$, $x\in(1,+\infty)$, να εξετάσετε αν $\varphi=h$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\eta\mu x}{x}=0$.
- $f'(x)f''(x)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. **i.** Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x)=\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1 – 1» και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1}.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases}-x^3+3x+1 & , \quad -1\le x\le 0\\ x^x & , \quad 0\le x\le \frac{2}{e}\end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Δ2. **i.** Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta\in\left[-1,\frac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi\in\left[-1,\frac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\frac{2f(\alpha)+3f(\beta)}{5}$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} xf(x)dx>\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}}-\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.