ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν η είναι μία «1 – 1» συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές είναι υποχρεωτικά ίσες.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}$, $x>0$.

Β2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$.

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτηση f.

Β4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & , \quad x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha & , \quad x\geq 1\end{cases}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 xf(x)dx = 1$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

Γ2. **i)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1 – 1» και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης της ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2) \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι:

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = \ell \in \mathbb{R}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$.

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με $\dfrac{2f\left(\frac{1}{3}\right)}{1 - 3x_1}$.

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii) η εξίσωση $x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2).