ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

Α2. Πότε η ευθεία $y=\ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g\circ f$ και $f\circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{συν}x-1}{x}=1$.

γ) Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεσή τους $g\circ f$ είναι συνεχής στο x_0.

δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$, με $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπους $g(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ και $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Β2. Αν $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $x>1$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1}=f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Β4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x)=\text{συν}x$ έχει λύση στο $(1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1)=0$
- $f(2)=2$
- $f'(2)=1$

- $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1,2]$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f

i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία $(\varepsilon_1): y = -x + 2$ και

ii. εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{f(x)}{x-1} > \dfrac{2-f(x)}{2-x}$, για κάθε $x \in (1,2)$.

Γ4. Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \ge 2x - 2$, για κάθε $x \in [1,2]$.

ii. $1 < \int_1^2 f(x)dx < \dfrac{3}{2}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^x & , \ x \ge 0 \\ -e^{-x} + 2 & , \ x < 0 \end{cases}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_1, f(x_1))$ με $x_1 > 0$, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$, έχει εξίσωση $y = e \cdot x$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής A, ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο $B(x_0, f(x_0))$.

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της του ερωτήματος Δ1, ανάμεσα στις ευθείες $x = x_0$ και $x = 1$. Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_0.

Δ4. Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο B του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος BO, όπου O είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f, έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;