

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ  
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

**Απάντηση**

Αφού η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, ισχύει ότι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Για κάθε  $x \neq x_0$  ισχύει ότι:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x_0 - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Τελικά προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

**A2.** Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

**Απάντηση**

Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, b]$ .

Αν:

- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$  και
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον  $x_0 \in (a, b)$  τέτοιο, ώστε  $f(x_0) = 0$ .

**A3.** Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες;

**Απάντηση**

Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού  $A$ ,

- για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = g(x)$ .

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)** Αν  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μία «1 – 1» συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $x\hat{O}y$  και  $x'\hat{O}y'$ .

**Σωστό**

**β)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ . **Σωστό**

**γ)** Για κάθε ζεύγος  $f, g$  συνεχώς συναρτήσεων στο  $[a, b]$  ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

**Λάθος**

**δ)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ . **Σωστό**

**ε)** Οι γραφικές παραστάσεις πολωνυμικών συναρτήσεων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες. **Λάθος**

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

**B1.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

### Απάντηση

$$\text{Για } x > 0: f'(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x < 1$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $(0, 1]$  και γνησίως αύξουσα στο διάστημα

$[1, +\infty)$ , ενώ παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το  $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ .

**B2.** Να μελετήσετε την  $f$  ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμψής της γραφικής της παράστασης.

### Απάντηση

$$\text{Για } x > 0: f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)' = (1)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)' = 0 - (x^{-2})' = -(-2x^{-3}) = \frac{2}{x^3} > 0.$$

Άρα η συνάρτηση  $f$  είναι κυρτή στο  $(0, +\infty)$  και δεν έχει σημεία καμπής.

- B3.** Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα  $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$ .

**Απάντηση**

Η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο διάστημα  $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$  ως παραγωγίσιμη.

Η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα  $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ .

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \quad \text{άρα} \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right).$$

Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση  $f$  στο διάστημα  $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$ .

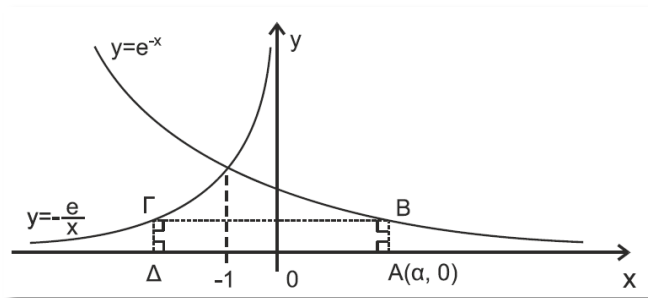
- B4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα  $x'x$  και τις ευθείες  $x=1$  και  $x=e$ .

**Απάντηση**

$f(x) = x + \frac{1}{x} > 0$  για κάθε  $x > 0$ , άρα και για κάθε  $x \in [1, e]$ , οπότε για το ζητούμενο εμβαδόν  $E$  ισχύει:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right]_1^e = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^e = \\ &= \left(\frac{e^2}{2} + \ln e\right) - \left(\frac{1^2}{2} + \ln 1\right) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

**ΘΕΜΑ Γ**



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις  $C_f$  και  $C_g$  των συναρτήσεων  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπους  $f(x) = e^{-x}$  και  $g(x) = -\frac{e}{x}$ . Το ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  έχει τις κορυφές  $A$  και  $\Delta$  πάνω στον άξονα  $x'x$  και τις κορυφές  $B$  και  $\Gamma$  πάνω στις  $C_f$  και  $C_g$ , αντίστοιχα. Έστω το σημείο  $A(\alpha, 0)$  με  $\alpha > -1$ .

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$  είναι  $(-e^{1+\alpha}, e^{-\alpha})$ .

**Απάντηση**

Τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τετμημένη, άρα,  $x_B = x_A = \alpha$ .

$$\text{Επιπλέον } B(x_B, y_B) \in C_f \Leftrightarrow y_B = f(x_B) \Leftrightarrow y_B = f(\alpha) \Leftrightarrow y_B = e^{-\alpha}.$$

Τα σημεία Β και Γ έχουν την ίδια τεταγμένη, άρα,  $y_\Gamma = y_B = e^{-\alpha}$ .

$$\text{Ακόμα } \Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma) \in C_g \Leftrightarrow y_\Gamma = g(x_\Gamma) \Leftrightarrow e^{-\alpha} = -\frac{e}{x_\Gamma} \Leftrightarrow x_\Gamma = -\frac{e}{e^{-\alpha}} \Leftrightarrow x_\Gamma = -e^{\alpha+1}$$

Συνεπώς  $\Gamma(-e^{\alpha+1}, e^{-\alpha})$ .

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, δίνεται, ως συνάρτηση του  $\alpha$ , από τον τύπο

$$E(\alpha) = e + \alpha \cdot e^{-\alpha}$$

**Απάντηση**

$$\begin{aligned} (AB\Gamma\Delta) &= (B\Gamma) \cdot (AB) = (x_B - x_\Gamma) \cdot (y_B - y_A) = [\alpha - (-e^{1+\alpha})] \cdot (e^{-\alpha} - 0) = \\ &= (\alpha + e^{1+\alpha}) \cdot e^{-\alpha} = \alpha e^{-\alpha} + e^{1+\alpha-\alpha} = \alpha e^{-\alpha} + e, \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση του εμβαδού του ορθογώνιου ΑΒΓΔ είναι η  $E(\alpha) = \alpha e^{-\alpha} + e$  με  $\alpha > -1$ .

- Γ3.** Να βρείτε τη θέση του σημείου Α για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγιστοποιείται.

**Απάντηση**

Για  $\alpha > -1$ :

$$\begin{aligned} E'(\alpha) &= (\alpha e^{-\alpha} + e)' = (\alpha)' \cdot e^{-\alpha} + \alpha \cdot (e^{-\alpha})' + (e)' = 1 \cdot e^{-\alpha} + \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot (-\alpha)' + 0 = \\ &= e^{-\alpha} + \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot (-1) = e^{-\alpha} - \alpha \cdot e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) \end{aligned}$$

$$E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) = 0 \stackrel{e^{-\alpha} > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow 1 = \alpha$$

$$E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) > 0 \stackrel{e^{-\alpha} > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow 1 > \alpha$$

$$E'(\alpha) < 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) < 0 \stackrel{e^{-\alpha} > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha$$

Άρα η συνάρτηση  $E$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-1, 1]$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$[1, +\infty)$ , οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο 1 το  $E(1) = 1 \cdot e^{-1} + e = \frac{1}{e} + e$ .

- Γ4.** Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Α ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.

**Απάντηση**

Η μέγιστη τιμή της συνάρτησης  $E$  είναι το  $E(1) = \frac{1}{e} + e$  για το οποίο ισχύει ότι  $\frac{1}{e} + e < 1 + 3 = 4$ , οπότε

ισχύει  $E(\alpha) < 4$  για κάθε  $\alpha > -1$ .

Συνεπώς δεν υπάρχει τιμή του  $\alpha$ , άρα και θέση του σημείου Α, ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου να είναι ίσο με 4 τ.μ.

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει:  $x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu x$ , για κάθε  $x \neq 0$ .

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$ .

**Απάντηση**

Για  $x \neq 0$  θέτουμε  $y = \frac{1}{x}$  οπότε  $x = \frac{1}{y}$  με  $y \neq 0$ .

$$x^2 \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = \eta\mu x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y}\right)^2 \cdot f(y) = \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} \cdot f(y) = \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right) \Leftrightarrow f(y) = y^2 \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)$$

Άρα για κάθε  $y \neq 0$ :  $f(y) = y^2 \eta\mu\left(\frac{1}{y}\right)$  ή για κάθε  $x \neq 0$ :  $f(x) = x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Η  $f$  είναι συνεχής στο 0, άρα ισχύει  $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Για  $x \neq 0$ :  $\left| x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| = x^2 \cdot \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x^2 \cdot 1 = x^2$ , οπότε  $-x^2 \leq x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$  και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0, \text{ από κριτήριο παρεμβολής ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0} \left( x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0.$$

**Δ2.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $O(0,0)$ .

**Απάντηση**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right]$$

Για  $x \neq 0$ :  $\left| x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| = |x| \cdot \left| \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq |x| \cdot 1 = |x|$ , οπότε  $-x \leq x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$  και επειδή

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x) = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0, \text{ από κριτήριο παρεμβολής ισχύει } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right] = 0.$$

Συνεπώς η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο 0 με  $f'(0) = 0$ .

Εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $O(0,0)$ :

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 0 = 0 \cdot x \Leftrightarrow y = 0 \text{ (άξονας } x'x)$$

**Δ3.** Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

**Απάντηση**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \right] \stackrel{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu y}{y} \right) = 1 = \lambda$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \lambda x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \cdot x \right] \stackrel{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu y}{y^2} - \frac{1}{y} \right) = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\eta\mu y - y}{y^2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(\eta\mu y - y)'}{(y^2)'} = \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sigma\upsilon\nu y - 1}{2y} \right) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \left( \frac{\sigma\upsilon\nu y - 1}{y} \right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 = \beta\end{aligned}$$

Επομένως η ευθεία με εξίσωση  $y = \lambda x + \beta$  ή  $y = 1 \cdot x + 0$  ή  $y = x$  είναι η πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της  $f$  στο  $+\infty$ .

**Δ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_{-1}^1 f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x dx$ .

#### Απάντηση

Έστω η συνάρτηση  $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x$ .

Ισχύει ότι:  $g(0) = f(0) \cdot \sigma\upsilon\nu 0 = 0 \cdot 1 = 0 = -g(0)$ .

Επιπλέον, για κάθε  $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$  ισχύει:

$$\begin{aligned}g(-x) &= f(-x) \cdot \sigma\upsilon\nu(-x) = (-x^2) \eta\mu\left(\frac{1}{-x}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu x = (-x^2) \left[ -\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \right] \cdot \sigma\upsilon\nu x = \\ &= x^2 \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = g(x)\end{aligned}$$

Άρα για κάθε  $x \in [-1, 1]$  ισχύει ότι  $g(-x) = g(x)$ .

Στο ολοκλήρωμα θέτω όπου  $x = -\omega$ , οπότε  $dx = -d\omega$ , για  $x = -1 \Leftrightarrow \omega = 1$  και για  $x = 1 \Leftrightarrow \omega = -1$ .

$$I = \int_1^{-1} g(-\omega)(-d\omega) = -\int_1^{-1} [-g(\omega)] d\omega = \int_1^{-1} g(\omega) d\omega = -\int_{-1}^1 g(\omega) d\omega = -I$$

Συνεπώς  $I = -I \Leftrightarrow 2I = 0 \Leftrightarrow I = 0$ .