ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Α3. Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μία «1 – 1» συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

γ) Για κάθε ζεύγος f, g συνεχώς συναρτήσεων στο $[\alpha,\beta]$ ισχύει ότι:

$$\int_\alpha^\beta f(x)g(x)dx=\int_\alpha^\beta f(x)dx\cdot\int_\alpha^\beta g(x)dx$$

δ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

ε) Οι γραφικές παραστάσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

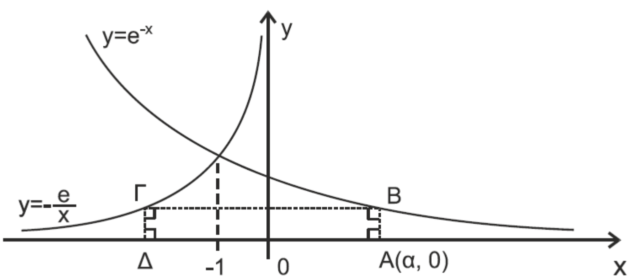
Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Β2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Β3. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{2}\right]$.

Β4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

ΘΕΜΑ Γ



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ με τύπους $f(x)=e^{-x}$ και $g(x)=-\frac{e}{x}$. Το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις C_f και C_g, αντίστοιχα. Έστω το σημείο $A(\alpha,0)$ με $\alpha>-1$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $\left(-e^{1+\alpha},e^{-\alpha}\right)$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, δίνεται, ως συνάρτηση του α, από τον τύπο

$$E(\alpha)=e+\alpha\cdot e^{-\alpha}$$

Γ3. Να βρείτε τη θέση του σημείου Α για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγιστοποιείται.

Γ4. Να εξετάσετε αν υπάρχει θέση του σημείου Α ώστε το ορθογώνιο ΑΒΓΔ να έχει εμβαδόν 4 τ.μ.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^2\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=\eta\mu x$, για κάθε $x\neq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases} x^2\cdot\eta\mu\frac{1}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 0 & , \quad x=0 \end{cases}$.

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $O(0,0)$.

Δ3. Να βρείτε την ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Δ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1} f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\,dx$.