

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ
ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ .

Απάντηση

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα αποδείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή ισχύει $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ προκύπτει ότι:

$$f(x_2) - f(x_1) > 0 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

A2. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Απάντηση

Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη σε αυτό, τότε ισχύει $f'(x_0) = 0$.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες. **Σωστό**

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$. **Λάθος**

- γ) Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$ τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 . **Σωστό**
- δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. **Λάθος**
- ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 . **Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Απάντηση

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 + 2)' = (x^3)' - 3(x^2)' + (2)' = 3x^2 - 3 \cdot 2x + 0 = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow 3x(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$+$
$f(x)$				

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[0, 2]$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0 το $f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 2 = 2$.

Η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο 2 το $f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$.

B2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχουν) τα σημεία καμψής της γραφικής παράστασης της f .

Απάντηση

$$f''(x) = (3x^2 - 6x)' = 3(x^2)' - 6(x)' = 3 \cdot 2x - 6 = 6x - 6 = 6(x - 1)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Η συνάρτηση f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$, κυρτή στο $[1, +\infty)$ και η γραφική της παράσταση έχει σημείο καμψής το $(1, f(1))$ με $f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$.

B3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_1^2 f(x) dx$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2) dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 2x \right]_1^2 = \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 2 \cdot 1 \right) = \\ &= \left(\frac{16}{4} - 8 + 4 \right) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 2 \right) = (4 - 8 + 4) - \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = 0 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

B4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Απάντηση

Έστω η συνάρτηση $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - e^x$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$$g(0) = f(0) - e^0 = 2 - 1 = 1 > 0$$

$$g(1) = f(1) - e^1 = (1^3 - 3 \cdot 1^2 + 2) - e = 0 - e = -e < 0$$

Άρα, από το θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = e^{x_0}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $h(x) = \ln x$.

Γ1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} D_f &= D_{g \circ h} = \{x \in D_h \text{ και } h(x) \in D_g\} = \{x \in (0, +\infty) \text{ και } \ln x > 0\} = \{x > 0 \text{ και } \ln x > \ln 1\} \stackrel{\ln x: \uparrow}{=} \\ &= \{x > 0 \text{ και } x > 1\} = (1, +\infty) \end{aligned}$$

$$f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = g(\ln x) = \frac{e^{\ln x} + 1}{e^{\ln x} - 1} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Γ2. Αν $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$, να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$

(όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

Απάντηση

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x+1}{x-1} \right)' = \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{(1+0) \cdot (x-1) - (x+1) \cdot (1-0)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2} < 0, \quad x > 1. \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(1, +\infty)$, οπότε η f είναι και $1-1$, συνεπώς αντιστρέφεται.

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, το σύνολο της είναι το:

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \quad \text{και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[(x+1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

Όμως το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι και το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της f^{-1} , οπότε το πεδίο ορισμού $(1, +\infty)$ της f^{-1} είναι το ίδιο με το πεδίο ορισμού της f .

Επιπλέον, για κάθε $x, y \in (1, +\infty)$ ισχύει ότι:

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-1} \Leftrightarrow (x-1) \cdot y = x+1 \Leftrightarrow xy - y = x+1 \Leftrightarrow xy - x = y+1 \Leftrightarrow$$

$$(y-1) \cdot x = y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1}$$

Επομένως οι συναρτήσεις f και f^{-1} έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο, άρα είναι ίσες ($f = f^{-1}$).

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Απάντηση

Από το ερώτημα **B2** ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, άρα η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Από το ερώτημα **B2** ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Γ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση $f(x) = \sin x$ έχει λύση στο $(1, +\infty)$.

Απάντηση

Το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα $(1, +\infty)$, άρα για κάθε $x \in (1, +\infty)$ ισχύει $f(x) > 1$.

Επιπλέον ισχύει ότι $-1 \leq \sin x \leq 1$, άρα $f(x) > 1 \geq \sin x \Rightarrow f(x) > \sin x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = \sin x$ δεν έχει λύση στο $(1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- $f(1) = 0$

- $f(2) = 2$
- $f'(2) = 1$
- $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f

- έχει κοινό σημείο με την ευθεία $(\varepsilon_1): y = -x + 2$ και
- εφάπτεται στην ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$.

Απάντηση

- Έστω η συνάρτηση $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - (-x + 2) = f(x) + x - 2$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[1, 2]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επιπλέον, $g(1) = f(1) + 1 - 2 = 0 - 1 = -1 < 0$ και $g(2) = f(2) + 2 - 2 = 2 > 0$.

Άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Bolzano, οπότε η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

Επειδή $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - (-x + 2) = 0 \Leftrightarrow f(x) = -x + 2$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και η ευθεία $(\varepsilon_1): y = -x + 2$ έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(1, 2)$.

- Αν η ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0, f(x_0))$ τότε ισχύει ότι:

$$\left\{ \begin{array}{l} y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ y = x \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0 \\ y = 1 \cdot x + 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = 1 \\ f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = 1 \\ f(x_0) - x_0 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) = 1 \\ f(x_0) = x_0 \end{array} \right\}$$

Όμως, επειδή $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [1, 2]$, η f' είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και $1 - 1$, οπότε:

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow f'(x_0) = f'(2) \Leftrightarrow x_0 = 2$$

Επιπλέον ισχύει ότι $f(x_0) = x_0 \Leftrightarrow f(2) = 2$, άρα η ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $(2, f(2))$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

Απάντηση

Η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 2]$, οπότε ισχύει ότι:

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow f'(x) \geq f'(2) \Leftrightarrow f'(x) \geq 1 \Rightarrow f'(x) > 0$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, 2]$, άρα η f είναι και $1 - 1$, άρα η f αντιστρέφεται.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} της f είναι το σύνολο τιμών της f .

Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα, άρα το σύνολο τιμών της είναι:

$$f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [0, 2]$$

Συνεπώς ισχύει και $D_{f^{-1}} = [0, 2]$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$, για κάθε $x \in (1, 2)$.

Απάντηση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, x]$ με $1 < x < 2$, άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής

$$\text{υπάρχει } \xi_1 \in (1, x) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_1) = \frac{f(x) - \cancel{f(1)}}{x-1} = \frac{f(x)}{x-1} \quad (1).$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[x, 2]$ με $1 < x < 2$, άρα από το Θεώρημα Μέσης Τιμής

$$\text{υπάρχει } \xi_2 \in (x, 2) \text{ τέτοιο, ώστε: } f'(\xi_2) = \frac{f(2) - f(x)}{2-x} = \frac{2-f(x)}{2-x} \quad (2).$$

$$\text{Τελικά έχουμε: } \xi_1 < \xi_2 \xRightarrow{f':\downarrow} f'(\xi_1) > f'(\xi_2) \xLeftrightarrow[(1)]{(2)} \frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}.$$

Επιπλέον, επειδή $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in [1, 2]$, η f είναι κοίλη στο $[1, 2]$, άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένης της $(2, f(2))$, την ευθεία $(\varepsilon_2): y = x$, εκτός από το σημείο επαφής, άρα ισχύει:

$$\int_1^2 f(x) dx < \int_1^2 x dx \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx < \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^2 \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx < \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \Leftrightarrow \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2}$$

$$\text{Τελικά ισχύει ότι: } 1 < \int_1^2 f(x) dx < \frac{3}{2}.$$