

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΤΕΚΝΩΝ ΕΛΛΗΝΩΝ ΤΟΥ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΚΑΙ ΤΕΚΝΩΝ ΥΠΑΛΛΗΛΩΝ
ΠΟΥ ΥΠΗΡΕΤΟΥΝ ΣΤΟ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 15 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Απάντηση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, ισχύει ότι:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Για κάθε $x \neq x_0$ ισχύει ότι:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$$

Επομένως ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = f'(x_0) \cdot (x_0 - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

Τελικά προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano.

Απάντηση

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$.

Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

A3. Πότε λέμε ότι δύο συναρτήσεις f και g είναι ίσες;

Απάντηση

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A ,

- για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μία «1 – 1» συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y'$.

Σωστό

β) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$. **Σωστό**

γ) Για κάθε ζεύγος f, g συνεχώς συναρτήσεων στο $[a, b]$ ισχύει ότι:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Λάθος

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 . **Σωστό**

ε) Οι γραφικές παραστάσεις πολυωνυμικών συναρτήσεων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου του 2 έχουν ασύμπτωτες. **Λάθος**

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = x^2 - 8x + 16$ και $g(x) = x^2$.

B1. Να προσδιορίσετε τη σύνθετη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Απάντηση

$$D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = (x^2)^2 - 8x^2 + 16 = x^4 - 8x^2 + 16$$

$$\text{Συνεπώς } h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } h(x) = x^4 - 8x^2 + 16.$$

$$\text{Αν } h(x) = x^4 - 8x^2 + 16, \quad x \in \mathbb{R}:$$

B2. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1, h(1))$.

Απάντηση

$$h(1) = 1^4 - 8 \cdot 1^2 + 16 = 1 - 8 + 16 = 9$$

$$\text{Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ ισχύει: } h'(x) = (x^4 - 8x^2 + 16)' = (x^4)' - 8(x^2)' + (16)' = 4x^3 - 8 \cdot 2x + 0 = 4x^3 - 16x.$$

$$\text{Άρα } h'(1) = 4 \cdot 1^3 - 16 \cdot 1 = 4 - 16 = -12.$$

Εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της h στο σημείο $(1, h(1))$:

$$y - h(1) = h'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 9 = -12(x - 1) \Leftrightarrow y - 9 = -12x + 12 \Leftrightarrow y = -12x + 21$$

B3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^1 h(x) dx$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 h(x) dx = \int_{-1}^1 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = \left[\frac{x^5}{5} - 8 \cdot \frac{x^3}{3} + 16x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{5} - 8 \cdot \frac{1}{3} + 16 \right) - \left(\frac{-1}{5} - 8 \cdot \left(\frac{-1}{3} \right) + 16 \cdot (-1) \right) = \\ &= \left(\frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 16 \right) - \left(-\frac{1}{5} + \frac{8}{3} - 16 \right) = \frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 16 + \frac{1}{5} - \frac{8}{3} + 16 = \frac{2}{5} - \frac{16}{3} + 32 = \frac{6}{15} - \frac{80}{15} + \frac{480}{15} = \frac{406}{15} \end{aligned}$$

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{(x-2)^2}$.

Απάντηση

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x)}{(x-2)^2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 8x^2 + 16}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)^2}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[(x+2)(x-2)]^2}{(x-2)^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^2 \cancel{(x-2)^2}}{\cancel{(x-2)^2}} = (2+2)^2 = 4^2 = 16 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Απάντηση

$$\text{Για } x > 0: f'(x) = \left(x + \frac{1}{x} \right)' = (x)' + \left(\frac{1}{x} \right)' = 1 + \left(-\frac{1}{x^2} \right) = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x = 1$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 > 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x > 1$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2} < 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} x < 1$$

Αρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$, ενώ παρουσιάζει ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$.

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να προσδιορίσετε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Απάντηση

$$\text{Για } x > 0: f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)' = (1)' - \left(\frac{1}{x^2} \right)' = 0 - (x^{-2})' - (-2x^{-3}) = \frac{2}{x^3} > 0.$$

Άρα η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$ και δεν έχει σημεία καμπής.

Γ3. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

Απάντηση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$ ως παραγωγίσιμη.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \quad \text{και} \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{3}{2} \quad \text{άρα} \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right).$$

Συνεπώς ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right]$.

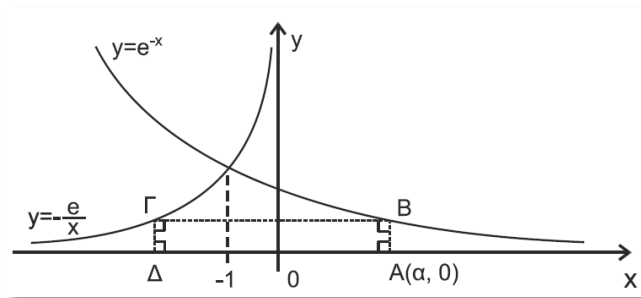
Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

Απάντηση

$f(x) = x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα και για κάθε $x \in [1, e]$, οπότε για το ζητούμενο εμβαδόν E ισχύει:

$$\begin{aligned} E &= \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right]_1^e = \left[\frac{x^2}{2} + \ln x\right]_1^e = \\ &= \left(\frac{e^2}{2} + \ln e\right) - \left(\frac{1^2}{2} + \ln 1\right) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{e^2 + 1}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ



Στο παραπάνω σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_f και C_g των συναρτήσεων $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = e^{-x}$ και $g(x) = -\frac{e}{x}$. Το ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ έχει τις κορυφές A και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές B και Γ πάνω στις C_f και C_g , αντίστοιχα. Έστω το σημείο $A(\alpha, 0)$ με $\alpha > -1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Γ είναι $(-e^{1+\alpha}, e^{-\alpha})$.

Απάντηση

Τα σημεία Α και Β έχουν την ίδια τετμημένη, άρα, $x_B = x_A = \alpha$.

$$\text{Επιπλέον } B(x_B, y_B) \in C_f \Leftrightarrow y_B = f(x_B) \Leftrightarrow y_B = f(\alpha) \Leftrightarrow y_B = e^{-\alpha}.$$

Τα σημεία Β και Γ έχουν την ίδια τεταγμένη, άρα, $y_\Gamma = y_B = e^{-\alpha}$.

$$\text{Ακόμα } \Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma) \in C_g \Leftrightarrow y_\Gamma = g(x_\Gamma) \Leftrightarrow e^{-\alpha} = -\frac{e}{x_\Gamma} \Leftrightarrow x_\Gamma = -\frac{e}{e^{-\alpha}} \Leftrightarrow x_\Gamma = -e^{\alpha+1}$$

Συνεπώς $\Gamma(-e^{\alpha+1}, e^{-\alpha})$.

- Δ2. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, δίνεται, ως συνάρτηση του α , από τον τύπο

$$E(\alpha) = e + \alpha \cdot e^{-\alpha}$$

Απάντηση

$$\begin{aligned} (AB\Gamma\Delta) &= (B\Gamma) \cdot (AB) = (x_B - x_\Gamma) \cdot (y_B - y_A) = [\alpha - (-e^{1+\alpha})] \cdot (e^{-\alpha} - 0) = \\ &= (\alpha + e^{1+\alpha}) \cdot e^{-\alpha} = \alpha e^{-\alpha} + e^{1+\alpha-\alpha} = \alpha e^{-\alpha} + e, \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση του εμβαδού του ορθογώνιου ΑΒΓΔ είναι η $E(\alpha) = \alpha e^{-\alpha} + e$ με $\alpha > -1$.

- Δ3. Να βρείτε τη θέση του σημείου Α για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ μεγιστοποιείται.

Απάντηση

Για $\alpha > -1$:

$$\begin{aligned} E'(\alpha) &= (\alpha e^{-\alpha} + e)' = (\alpha)' \cdot e^{-\alpha} + \alpha \cdot (e^{-\alpha})' + (e)' = 1 \cdot e^{-\alpha} + \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot (-\alpha)' + 0 = \\ &= e^{-\alpha} + \alpha \cdot e^{-\alpha} \cdot (-1) = e^{-\alpha} - \alpha \cdot e^{-\alpha} = e^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) \end{aligned}$$

$$E'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) = 0 \stackrel{e^{-\alpha} > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow 1 = \alpha$$

$$E'(\alpha) > 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) > 0 \stackrel{e^{-\alpha} > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha > 0 \Leftrightarrow 1 > \alpha$$

$$E'(\alpha) < 0 \Leftrightarrow e^{-\alpha} \cdot (1 - \alpha) < 0 \stackrel{e^{-\alpha} > 0}{\Leftrightarrow} 1 - \alpha < 0 \Leftrightarrow 1 < \alpha$$

Άρα η συνάρτηση E είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα

$[1, +\infty)$, οπότε παρουσιάζει μέγιστο στο 1 το $E(1) = 1 \cdot e^{-1} + e = \frac{1}{e} + e$.