

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό $ζ$ μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (α,β)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = ζ$.

A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ .

Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

A3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A , B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g , δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

β) Ισχύει ότι $|ημx| \leq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α,β]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [α,β]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0.$$

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ και } h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$ και $r(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \geq 1$.

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και ότι $f^{-1} = f$, όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r .

B4. Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x + 4 + e^\lambda & , 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3 + \lambda & , x \geq 2 \end{cases}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.
- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.
- Γ3.** **i)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0, 3]$.
ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0, 3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.
- Γ4.** Κινητό σημείο M ξεκινά από το σημείο $A(2, 0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $v = 0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = \hat{AOM}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία είναι ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.
- Δ3.** **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.
ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \leq x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- Δ4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x = -\ln 2$ και $x = 0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα x' και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .