ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=1$.

Α2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\eta\mu\frac{1}{x}\right)=0$.

β) Κάθε συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει ότι $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha,\beta,\gamma\in\Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=\int_{\alpha}^{\gamma}f(x)dx+\int_{\gamma}^{\beta}f(x)dx$$

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=2\ln x-1$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=x-2$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Αν $h(x)=2\ln(x-2)-1$, $x>2$, τότε:

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα.

Β3. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της h^{-1}.

Β4. Αν $h^{-1}(x)=2+e^{\frac{x+1}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$, να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση $\varphi(x)=\left(h^{-1}(x)-3\right)\cdot\left(x^3-8\right)$ στο $[-1,2]$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} e^{x+1}+\lambda x, & x<-1 \\ \dfrac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha}, & x\geq -1\end{cases}$ όπου $\alpha>1$ και $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\alpha=2$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(-1,0)$.

Γ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Γ4. Να αποδείξετε ότι: $f(\eta\mu x-2)\geq 2\eta\mu x-2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g:\left(0,\frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει:

- $|g(x)-g(y)|\leq(x-y)^2$, για κάθε $x,y\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,
- $g(x)=f(x)\eta\mu x$, για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$,
- $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση g είναι σταθερή για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ii) ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu x}$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1 – 1» και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)-2}{x-\frac{\pi}{4}}+\dfrac{f^{-1}(\sqrt{2})-\frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{2}}=0$, με $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(\frac{\pi}{4},\sqrt{2}\right)$.

Δ4. **i)** Να δείξετε ότι η συνάρτηση $H(x)=\frac{1}{2}\ln(1-\sigma\upsilon\nu x)-\frac{1}{2}\ln(1+\sigma\upsilon\nu x)$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ είναι μια παράγουσα της συνάρτησης $h(x)=\dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu^2 x}$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τις ευθείες $y=2$ και $x=\frac{\pi}{2}$.

Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ΄ Λυκείου

Πανελλαδικές Εξετάσεις

Ε κ δ ό σ ε ι ς Π α τ ά κ η