

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Έστω η συνάρτηση  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = 1$ .
- A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της;
- A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Ισχύει ότι  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$ .
- β)** Κάθε συνάρτηση  $f$  διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.
- γ)** Η συνάρτηση  $f(x) = x^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει ότι  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ .
- δ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής σε διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ , τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$$

- ε)** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$ , τότε  $f(x) < 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = 2 \ln x - 1$  και η συνάρτηση  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $g(x) = x - 2$ .

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση  $h = f \circ g$ .
- Αν  $h(x) = 2 \ln(x - 2) - 1$ ,  $x > 2$ , τότε:
- B2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h$  ως προς την κυρτότητα.
- B3.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $h$  αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της  $h^{-1}$ .
- B4.** Αν  $h^{-1}(x) = 2 + e^{\frac{x+1}{2}}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle για τη συνάρτηση  $\varphi(x) = (h^{-1}(x) - 3) \cdot (x^3 - 8)$  στο  $[-1, 2]$ .

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνάρτηση  $f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = \frac{x}{e^x}$ .

- Γ1.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (τοπικά και ολικά).
- Γ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $f$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- Γ3.** Με βάση τα ερωτήματα Γ1 και Γ2, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση  $f$ .

- Γ4.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 0$  και  $x = 1$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \lambda x & , x < -1 \\ \frac{\alpha x + \alpha}{x + \alpha} & , x \geq -1 \end{cases}$  όπου  $\alpha > 1$  και  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda = 1$ .
- Δ2.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 2$  και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο  $A(-1, 0)$ .
- Δ3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$ .
- Δ4.** Να αποδείξετε ότι:  $f(\eta\mu x - 2) \geq 2\eta\mu x - 2$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .