ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, για κάποιο $c\in\mathbb{R}$.

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι $1-1$. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1}, της f είναι το σύνολο τιμών της f.

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

γ) Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=-\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ε) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3+\alpha x^2+9x-3$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=1$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α.

Στα ερωτήματα **Β2** έως **Β4** να θεωρήσετε ότι $\alpha=-6$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Β4. Έστω $g(x)=x+f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Αν $\xi\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi,f(\xi))$ και $B(\xi,f(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x ημx & , \quad x<0 \\ \sqrt{x^2+x} & , \quad x\geq 0 \end{cases}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0.

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(ε): y=x+\frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $ξ\in(-π,0)$.

Γ4. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M, $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t\geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M.

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F, της f στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι: $xf(x)=2F(x)\ln x$, για κάθε $x>0$.

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(ε): y=2x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x>0$, είναι σταθερή.

Δ2. **i)** Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}$.

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1)=1$ και $F(x)=x^{\ln x}$, για κάθε $x>0$.

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2)=F(x)-(x-1)^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Δ4. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τις ευθείες $x=1$, $x=e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E>2e-3$.