

**ΘΕΜΑ Α**

- A1.** Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο  $x_0$  του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- A2.** Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης  $f$ , ορισμένης σε ένα διάστημα  $\Delta$ ;
- A3.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
- A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α)** Έστω μια συνάρτηση  $f$ , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα  $[a, \beta]$ .
- Αν
- η  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, \beta]$ .
  - $f(a) \cdot f(\beta) < 0$
- τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον,  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε  $f(x_0) = 0$ .
- β)** Οι γραφικές παραστάσεις  $C$  και  $C'$  των συναρτήσεων  $f$  και  $f^{-1}$  είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία  $y = x$  που διχοτομεί τις γωνίες  $x\hat{O}y$  και  $x'\hat{O}y'$ .
- γ)** Η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, +\infty)$  είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.
- δ)** Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $x_0$  και η συνάρτηση  $g$  είναι συνεχής στο  $f(x_0)$ , τότε η σύνθεσή τους,  $g \circ f$ , είναι συνεχής στο  $x_0$ .
- ε)** Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $-f$  είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της  $f$  ως προς τον άξονα  $y'y$ .

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$ ,  $x > 0$  και  $g(x) = e^x + 1$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- B1.** Να αποδείξετε ότι η σύνθεση της συνάρτησης  $g$  με τη συνάρτηση  $f$  είναι η συνάρτηση

$$(f \circ g)(x) = \ln(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$$

- B2.** Να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f \circ g$  είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τη συνάρτηση  $h = (f \circ g)^{-1}$ .

Αν  $h(x) = \ln(e^x - 1)$ ,  $x > 0$  τότε:

- B3.** **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h$  ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση  $h$  ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- B4.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $h$ .

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\alpha x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .

**Γ1.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο σημείο της με τετμημένη  $x_0 = 0$ .

**Γ2.** Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του  $\alpha$  ώστε η  $f$  να είναι κυρτή στο  $\mathbb{R}$ .

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι  $\alpha = 3$ .

**Γ3.** Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{\ln(f(x) - x)}$ .

**Γ4.** Έστω  $E$  το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  που ορίζουν τα σημεία  $O(0,0)$ ,  $A(x,0)$  και  $B(x,f(x))$ , με  $x > 0$ . Αν το  $x$  μεταβάλλεται με ρυθμό  $2 \text{ cm/sec}$ , να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού  $E$ , όταν  $x = 2 \text{ cm}$ .

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + \alpha x$ , όπου  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Για τη συνάρτηση  $f$  ισχύει ότι:

$$e^{f(x)-1} + x \geq \sqrt{x^2 + 1}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**Δ1.** να αποδείξετε ότι:

**i)**  $f'(0) = -1$  και

**ii)**  $\alpha = -1$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  βρίσκεται πάνω από τον άξονα  $x'x$  και ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ .

**Δ3.** Έστω  $F$  μια αρχική συνάρτηση της συνάρτησης  $f$  στο  $\mathbb{R}$ . Να λύσετε στο διάστημα  $[0, \pi]$  την εξίσωση:

$$F(\eta\mu^2 x) + F(3\eta\mu^2 x) = 2F(2\eta\mu^2 x)$$

**Δ4.** Να αποδείξετε ότι:  $\int_0^1 x \eta\mu(1 - f(x)) dx < \frac{7 - 4\sqrt{2}}{6}$ .