

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Απάντηση

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

- Αν $x_1 = x_2$, τότε από τον ορισμό της συνάρτησης ισχύει αναγκαστικά $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε επειδή η f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , από το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \quad (1)$$

Επειδή, όμως, το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει ότι $f'(\xi) = 0$, οπότε λόγω της (1) ισχύει ότι:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1)$$

- Αν $x_1 > x_2$, ομοίως αποδεικνύουμε ότι $f(x_1) = f(x_2)$.

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Απάντηση

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν ισχύει ότι:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,

τότε ισχύει και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

A3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Απάντηση

Κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Delta$.

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1 – 1», αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

Λάθος

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Σωστό

γ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

Σωστό

δ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Σωστό

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$.

Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = 2 \ln(x-1)$$

και

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Απάντηση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης h είναι:

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f\} \\ &= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} + 1 > 1\} \\ &= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } \sqrt{x-2} > 0\} \\ &= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } x-2 > 0\} \\ &= \{x \in [2, +\infty) \text{ και } x > 2\} \\ &= (2, +\infty) \end{aligned}$$

Ο τύπος της συνάρτησης h είναι:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x-2} + 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) = 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \ln(\sqrt{x-2})^2 = \ln|x-2| \stackrel{x>2}{=} \ln(x-2)$$

Επομένως: $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$.

Στα επόμενες ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$.

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h^{-1} .

Απάντηση

$h'(x) = [\ln(x-2)]' = \frac{1}{x-2}(x-2)' = \frac{1}{x-2}(1-0) = \frac{1}{x-2} > 0$ για $x > 2$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε είναι και 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Η συνάρτηση h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(2, +\infty)$, άρα το σύνολο τιμών της οπότε και το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της h^{-1} είναι το διάστημα $(\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x))$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \ln(x-2) \stackrel{y=x-2}{=} \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x-2) \stackrel{\omega=x-2}{=} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \ln \omega = +\infty$$

Άρα το πεδίο ορισμού της h^{-1} είναι το $\mathbb{R}$.

B3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$.

Απάντηση

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2 \ln(x-1)}{x-2} \right) \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[2 \ln(x-1)]'}{(x-2)'} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2}{x-1}}{1} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{x-1} = \frac{2}{2-1} = 2$$

Από το ερώτημα B2 ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} h(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = (-\infty) \cdot 2 = -\infty.$$

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα.

- Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

i) $\kappa = 0$ και

ii) $\mu = 1$.

Απάντηση

i) Αν $\kappa \neq 0$, τότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \kappa x = \begin{cases} +\infty, & \text{αν } \kappa > 0 \\ -\infty, & \text{αν } \kappa < 0 \end{cases}$.

Αυτό όμως είναι άτοπο αφού $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Αν $\kappa = 0$, τότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu}{x} = 0$.

Άρα η ευθεία $y = 0$ (άξονας x') είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

Επομένως ισχύει ότι $\kappa = 0$.

ii) Για $\kappa = 0$ ισχύει $f(x) = \frac{\mu x}{x^2 + 1}$ οπότε:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\mu x}{x^2 + 1} \right)' = \mu \left(\frac{x}{x^2 + 1} \right)' = \mu \cdot \frac{(x)' \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \mu \cdot \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot (2x + 0)}{(x^2 + 1)^2} = \\ &= \mu \cdot \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = \mu \cdot \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Για να εφάπτεται η ευθεία $y = x$ στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων $O(0,0)$, θα πρέπει:

- Το $O(0,0)$ να είναι σημείο της γραφικής παράστασης της f , δηλαδή να ισχύει $f(0) = 0$, που ισχύει

$$\text{διότι } f(0) = \frac{\mu \cdot 0}{0^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0 \text{ και}$$

- ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας να είναι ίσος με $f'(0)$, δηλαδή να ισχύει $f'(0) = 1$, οπότε

$$\mu \cdot \frac{1 - 0^2}{(0^2 + 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \mu \cdot \frac{1}{1^2} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1.$$

Γ2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ και να βρείτε το πλήθος των ριζών της

$$\text{εξίσωσης } f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2, \text{ για κάθε τιμή της παραμέτρου } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Απάντηση

i) Για $\kappa = 0$ και $\mu = 1$ είναι $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ και $f'(x) = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{(x^2 + 1)^2}$.

Άρα $f'(x) = 0$ για $x = \pm 1$, $f'(x) < 0$ για $x > 1$ ή $x < -1$ και $f'(x) > 0$ για $-1 < x < 1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
f'(x)	-	○	+	○	-
f(x)					

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$, παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$ την τιμή $f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2}$ και τοπικό μέγιστο για

$$x = 1 \text{ την τιμή } f(1) = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2}.$$

ii) Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1 = (-\infty, -1)$, οπότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{-1}{(-1)^2 + 1} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = \left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2 = [-1, 1]$, οπότε:

$$f(\Delta_2) = [f(-1), f(1)] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_3 = (1, +\infty)$, οπότε:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{1^2 + 1} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(\Delta_3) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \right) = \left(0, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Τελικά το σύνολο τιμών της } f \text{ είναι: } f(\mathbb{R}) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) \cup f(\Delta_3) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right].$$

Θα βρούμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ για τις διάφορες τιμές του α .

Αν $\alpha \neq 0$ τότε $\alpha^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} + \alpha^2 > \frac{1}{2}$, άρα η τιμή $\frac{1}{2} + \alpha^2$ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της f , επομένως η

εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Αν $\alpha = 0$ τότε $\frac{1}{2} + \alpha^2 = \frac{1}{2}$ και επειδή $f(x) = \frac{1}{2}$ μόνο για $x = 1$, η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Για $v \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx$.

i) Να αποδείξετε ότι $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}$, $v \in \mathbb{N}$.

ii) Να υπολογίσετε τα I_0 , I_1 και I_2 .

Απάντηση

$$\begin{aligned} \text{i) } I_v + I_{v+1} &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1} dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{2v+1}}{x^2+1} + \frac{x^{2v+3}}{x^2+1} \right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2v+3}}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} \cdot (1+x^2)}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} \cdot (x^2+1)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{2v+1} dx = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2} \right]_0^1 = \\ &= \frac{1^{2v+2}}{2v+2} - \frac{0^{2v+2}}{2v+2} = \frac{1}{2v+2}, \quad v \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } I_0 &= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \int_0^1 \frac{2x}{2(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \cdot [\ln(x^2+1)]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \cdot (\ln 2 - 0) = \frac{1}{2} \ln 2 \\ I_v + I_{v+1} &= \frac{1}{2v+2} \stackrel{v=0}{\Rightarrow} I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln 2 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \Leftrightarrow I_1 = \frac{1-\ln 2}{2} \\ I_v + I_{v+1} &= \frac{1}{2v+2} \stackrel{v=1}{\Rightarrow} I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow I_2 = \frac{1}{4} - \frac{2}{4} + \frac{2\ln 2}{4} \Leftrightarrow \\ I_2 &= -\frac{1}{4} + \frac{2\ln 2}{4} \Leftrightarrow I_2 = \frac{2\ln 2 - 1}{4} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε: $g(x_1) + x_1 = 0$.

Απάντηση

Υπόθεση του x_1

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = g(x) + x$.

Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.

$$\left\{ \begin{array}{l} h(-1) = g(-1) - 1 < 0 \\ h(0) = g(0) + 0 = g(0) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow h(-1) \cdot h(0) < 0$$

Άρα, από το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε:

$$h(x_1) = 0 \Leftrightarrow g(x_1) + x_1 = 0$$

Μοναδικότητα του x_1

$$h'(x) = (g(x) + x)' = g'(x) + 1 \neq 0, \text{ αφού } g'(x) \neq -1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Η h' είναι συνεχής στο $[-1, 0]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και $h'(x) \neq 0$, οπότε από τις συνέπειες του Θεωρήματος Bolzano, η h' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[-1, 0]$, άρα η h είναι γνησίως μονότονη στο $[-1, 0]$.

Επειδή $h(x_1) = 0$, $h(0) = g(0) > 0$, άρα $h(x_1) < h(0)$ και $x_1 < 0$, επειδή η h είναι γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1, 0]$.

Συνεπώς το $x_1 \in (-1, 0)$ θα είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $h(x) = 0$.

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x) & , \quad x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x & , \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Απάντηση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, άρα ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \ell \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 \cdot (g(x) + x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x \cdot (g(x) + x)] = 0 \cdot (g(0) + 0) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - \kappa x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\varepsilon\varphi x}{x} - \kappa \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x \cdot \sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu x}{x} \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \kappa \right) = 2 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{1} - \kappa = 3 - \kappa \end{aligned}$$

Επομένως ισχύει $0 = 3 - \kappa \Leftrightarrow \kappa = 3$.

Δ3. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν:

i) $f(x) \geq 0$ και

ii) η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μια ρίζα, x_2 .

Απάντηση

i) Για $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι $f(x) = 2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)' = 2\sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - 3 = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu^2 x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{2\sigma\upsilon\nu^2 x(\sigma\upsilon\nu x - 1) - (\sigma\upsilon\nu x + 1)(\sigma\upsilon\nu x - 1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sin x - 1)(2\sin^2 x - \sin x - 1)}{\sin^2 x} = \frac{(\sin x - 1) \cdot 2 \cdot (\sin x - 1) \left(\sin x + \frac{1}{2} \right)}{\sin^2 x} = \frac{(\sin x - 1)^2 (2\sin x + 1)}{\sin^2 x}$$

Επειδή για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύει $(\sin x - 1)^2 \geq 0$, $\sin^2 x > 0$ και $\sin x \geq 0 \Rightarrow 2\sin x + 1 > 0$, προκύπτει ότι $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ενώ ισχύει $f'(x) = 0$ μόνο για $x = 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Τελικά έχουμε: $0 \leq x < \frac{\pi}{2} \stackrel{f: \uparrow}{\Rightarrow} f(0) \leq f(x) \Leftrightarrow 0 \leq f(x)$.

ii) Η εξίσωση $3f(x) = \pi$ γράφεται και $f(x) = \frac{\pi}{3}$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι το $\frac{\pi}{3}$ είναι τιμή του

υποσυνόλου τιμών $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right)$ της f και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα θα υπάρχει μοναδική τιμή

$x_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2) = \frac{\pi}{3}$.

Πράγματι, $f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (2\eta\mu x + \epsilon\phi x - 3x) = 2 \cdot 1 + (+\infty) - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = +\infty$, οπότε

$$f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)\right) = [0, +\infty), \text{ άρα } \frac{\pi}{3} \in f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$.

ii) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, όπου x_1 είναι ο αριθμός από το ερώτημα **Δ1** και x_2 είναι η ρίζα από το ερώτημα **Δ3ii**. Αν ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3 \ln 2 - 3$$

Απάντηση

i) Στο ερώτημα Δ1, έχουμε αποδείξει ότι η συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = g(x) + x$ έχει ακριβώς μία πραγματική ρίζα $x_1 \in (-1, 0)$.

Από συνέπειες Θεωρήματος Bolzano, η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(x_1, 0]$ και επειδή $h(0) = g(0) > 0$ θα ισχύει για κάθε $x \in [x_1, 0]$:

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow g(x) + x \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \cdot [g(x) + x] \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

ii) Έστω:

E_1 : το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x = x_1$ και τον άξονα $y'y$.

E_2 : το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x = \frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $y'y$.

$$E_1 = \int_{x_1}^0 f(x) dx = \int_{x_1}^0 x^2 \cdot [g(x) + x] dx = \int_{x_1}^0 x^2 \cdot g(x) dx + \int_{x_1}^0 x^3 dx = \int_{x_1}^0 \left(\frac{x^3}{3} \right)' \cdot g(x) dx + \left[\frac{x^4}{4} \right]_{x_1}^0 =$$

$$\left[\frac{x^3}{3} \cdot g(x) \right]_{x_1}^0 - \int_{x_1}^0 \frac{x^3}{3} \cdot g'(x) dx + 0 - \frac{x_1^4}{4} = -\frac{x_1^3}{3} \cdot g(x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4}$$

$$E_2 = \int_0^{\frac{\pi}{3}} |f(x)| dx \stackrel{x \in [0, \frac{\pi}{3}]}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x) dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \varepsilon\varphi x dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx =$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \eta\mu x dx + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} dx - 3 \int_0^{\frac{\pi}{3}} x dx = [-2\sigma\upsilon\nu x]_0^{\frac{\pi}{3}} + [-\ln(\sigma\upsilon\nu x)]_0^{\frac{\pi}{3}} - 3 \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -2 \cdot \frac{1}{2} - (-2) \cdot 1 - \ln \frac{1}{2} - \ln 1 - 3 \left(\frac{\pi^2}{18} - 0 \right) = -1 + 2 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

Ισχύει:

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow -\frac{x_1^3}{3} \cdot g(x_1) - \frac{1}{3} \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \stackrel{g(x_1) = -x_1}{\Leftrightarrow}$$

$$x_1^3 \cdot x_1 - \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx - \frac{3x_1^4}{4} = 3 + 3\ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$x_1^4 - \int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx - \frac{3x_1^4}{4} = 3 + 3\ln 2 - \frac{\pi^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\int_{x_1}^0 x^3 \cdot g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3$$